

Kovariante räumliche Struktur relativistischer Systeme

Joseph Demuth

1973

Kovariante räumliche Struktur relativistischer Systeme.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Fakultät für Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Joseph Demuth
aus

Luxemburg

1972



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Salecker

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Bross

Tag der mündlichen Prüfung: 27. 2. 1973

Sammlung

Abteilung

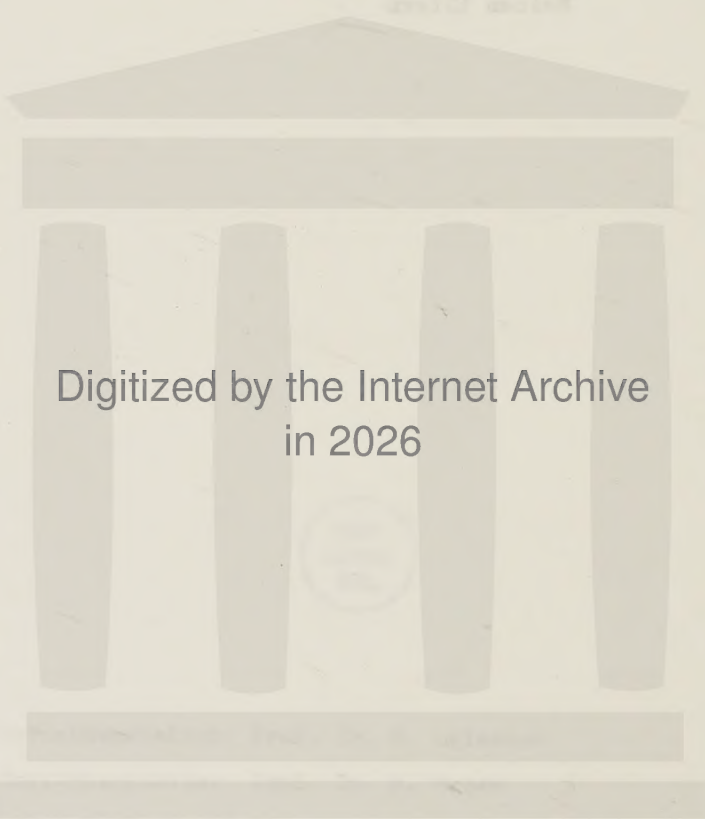
Der Aufbau des menschlichen Systems

Meinen Eltern

141	Einleitung	1
142	Einleitung zum 1. Teil	2
143	Einleitung zum 2. Teil	3
144	Der Aufbau des menschlichen Systems	4
145	Einleitung zum 3. Teil	5
146	Einleitung zum 4. Teil	6
147	Einleitung zum 5. Teil	7
148	Einleitung zum 6. Teil	8
149	Einleitung zum 7. Teil	9
150	Einleitung zum 8. Teil	10
151	Einleitung zum 9. Teil	11
152	Einleitung zum 10. Teil	12
153	Einleitung zum 11. Teil	13
154	Einleitung zum 12. Teil	14
155	Einleitung zum 13. Teil	15
156	Einleitung zum 14. Teil	16
157	Einleitung zum 15. Teil	17
158	Einleitung zum 16. Teil	18
159	Einleitung zum 17. Teil	19
160	Einleitung zum 18. Teil	20
161	Einleitung zum 19. Teil	21
162	Einleitung zum 20. Teil	22
163	Einleitung zum 21. Teil	23
164	Einleitung zum 22. Teil	24
165	Einleitung zum 23. Teil	25
166	Einleitung zum 24. Teil	26
167	Einleitung zum 25. Teil	27
168	Einleitung zum 26. Teil	28
169	Einleitung zum 27. Teil	29
170	Einleitung zum 28. Teil	30
171	Einleitung zum 29. Teil	31
172	Einleitung zum 30. Teil	32
173	Einleitung zum 31. Teil	33
174	Einleitung zum 32. Teil	34
175	Einleitung zum 33. Teil	35
176	Einleitung zum 34. Teil	36
177	Einleitung zum 35. Teil	37
178	Einleitung zum 36. Teil	38
179	Einleitung zum 37. Teil	39
180	Einleitung zum 38. Teil	40
181	Einleitung zum 39. Teil	41
182	Einleitung zum 40. Teil	42
183	Einleitung zum 41. Teil	43
184	Einleitung zum 42. Teil	44
185	Einleitung zum 43. Teil	45
186	Einleitung zum 44. Teil	46
187	Einleitung zum 45. Teil	47
188	Einleitung zum 46. Teil	48
189	Einleitung zum 47. Teil	49
190	Einleitung zum 48. Teil	50
191	Einleitung zum 49. Teil	51
192	Einleitung zum 50. Teil	52
193	Einleitung zum 51. Teil	53
194	Einleitung zum 52. Teil	54
195	Einleitung zum 53. Teil	55
196	Einleitung zum 54. Teil	56
197	Einleitung zum 55. Teil	57
198	Einleitung zum 56. Teil	58
199	Einleitung zum 57. Teil	59
200	Einleitung zum 58. Teil	60
201	Einleitung zum 59. Teil	61
202	Einleitung zum 60. Teil	62
203	Einleitung zum 61. Teil	63
204	Einleitung zum 62. Teil	64
205	Einleitung zum 63. Teil	65
206	Einleitung zum 64. Teil	66
207	Einleitung zum 65. Teil	67
208	Einleitung zum 66. Teil	68
209	Einleitung zum 67. Teil	69
210	Einleitung zum 68. Teil	70
211	Einleitung zum 69. Teil	71
212	Einleitung zum 70. Teil	72
213	Einleitung zum 71. Teil	73
214	Einleitung zum 72. Teil	74
215	Einleitung zum 73. Teil	75
216	Einleitung zum 74. Teil	76
217	Einleitung zum 75. Teil	77
218	Einleitung zum 76. Teil	78
219	Einleitung zum 77. Teil	79
220	Einleitung zum 78. Teil	80
221	Einleitung zum 79. Teil	81
222	Einleitung zum 80. Teil	82
223	Einleitung zum 81. Teil	83
224	Einleitung zum 82. Teil	84
225	Einleitung zum 83. Teil	85
226	Einleitung zum 84. Teil	86
227	Einleitung zum 85. Teil	87
228	Einleitung zum 86. Teil	88
229	Einleitung zum 87. Teil	89
230	Einleitung zum 88. Teil	90
231	Einleitung zum 89. Teil	91
232	Einleitung zum 90. Teil	92
233	Einleitung zum 91. Teil	93
234	Einleitung zum 92. Teil	94
235	Einleitung zum 93. Teil	95
236	Einleitung zum 94. Teil	96
237	Einleitung zum 95. Teil	97
238	Einleitung zum 96. Teil	98
239	Einleitung zum 97. Teil	99
240	Einleitung zum 98. Teil	100
241	Einleitung zum 99. Teil	101
242	Einleitung zum 100. Teil	102

Die wissenschaftliche Methode der menschlichen Systeme

243	Einleitung	103
244	Einleitung zum 1. Teil	104
245	Einleitung zum 2. Teil	105
246	Einleitung zum 3. Teil	106
247	Einleitung zum 4. Teil	107
248	Einleitung zum 5. Teil	108
249	Einleitung zum 6. Teil	109
250	Einleitung zum 7. Teil	110
251	Einleitung zum 8. Teil	111
252	Einleitung zum 9. Teil	112
253	Einleitung zum 10. Teil	113
254	Einleitung zum 11. Teil	114
255	Einleitung zum 12. Teil	115
256	Einleitung zum 13. Teil	116
257	Einleitung zum 14. Teil	117
258	Einleitung zum 15. Teil	118
259	Einleitung zum 16. Teil	119
260	Einleitung zum 17. Teil	120
261	Einleitung zum 18. Teil	121
262	Einleitung zum 19. Teil	122
263	Einleitung zum 20. Teil	123
264	Einleitung zum 21. Teil	124
265	Einleitung zum 22. Teil	125
266	Einleitung zum 23. Teil	126
267	Einleitung zum 24. Teil	127
268	Einleitung zum 25. Teil	128
269	Einleitung zum 26. Teil	129
270	Einleitung zum 27. Teil	130
271	Einleitung zum 28. Teil	131
272	Einleitung zum 29. Teil	132
273	Einleitung zum 30. Teil	133
274	Einleitung zum 31. Teil	134
275	Einleitung zum 32. Teil	135
276	Einleitung zum 33. Teil	136
277	Einleitung zum 34. Teil	137
278	Einleitung zum 35. Teil	138
279	Einleitung zum 36. Teil	139
280	Einleitung zum 37. Teil	140
281	Einleitung zum 38. Teil	141
282	Einleitung zum 39. Teil	142
283	Einleitung zum 40. Teil	143
284	Einleitung zum 41. Teil	144
285	Einleitung zum 42. Teil	145
286	Einleitung zum 43. Teil	146
287	Einleitung zum 44. Teil	147
288	Einleitung zum 45. Teil	148
289	Einleitung zum 46. Teil	149
290	Einleitung zum 47. Teil	150
291	Einleitung zum 48. Teil	151
292	Einleitung zum 49. Teil	152
293	Einleitung zum 50. Teil	153
294	Einleitung zum 51. Teil	154
295	Einleitung zum 52. Teil	155
296	Einleitung zum 53. Teil	156
297	Einleitung zum 54. Teil	157
298	Einleitung zum 55. Teil	158
299	Einleitung zum 56. Teil	159
300	Einleitung zum 57. Teil	160
301	Einleitung zum 58. Teil	161
302	Einleitung zum 59. Teil	162
303	Einleitung zum 60. Teil	163
304	Einleitung zum 61. Teil	164
305	Einleitung zum 62. Teil	165
306	Einleitung zum 63. Teil	166
307	Einleitung zum 64. Teil	167
308	Einleitung zum 65. Teil	168
309	Einleitung zum 66. Teil	169
310	Einleitung zum 67. Teil	170
311	Einleitung zum 68. Teil	171
312	Einleitung zum 69. Teil	172
313	Einleitung zum 70. Teil	173
314	Einleitung zum 71. Teil	174
315	Einleitung zum 72. Teil	175
316	Einleitung zum 73. Teil	176
317	Einleitung zum 74. Teil	177
318	Einleitung zum 75. Teil	178
319	Einleitung zum 76. Teil	179
320	Einleitung zum 77. Teil	180
321	Einleitung zum 78. Teil	181
322	Einleitung zum 79. Teil	182
323	Einleitung zum 80. Teil	183
324	Einleitung zum 81. Teil	184
325	Einleitung zum 82. Teil	185
326	Einleitung zum 83. Teil	186
327	Einleitung zum 84. Teil	187
328	Einleitung zum 85. Teil	188
329	Einleitung zum 86. Teil	189
330	Einleitung zum 87. Teil	190
331	Einleitung zum 88. Teil	191
332	Einleitung zum 89. Teil	192
333	Einleitung zum 90. Teil	193
334	Einleitung zum 91. Teil	194
335	Einleitung zum 92. Teil	195
336	Einleitung zum 93. Teil	196
337	Einleitung zum 94. Teil	197
338	Einleitung zum 95. Teil	198
339	Einleitung zum 96. Teil	199
340	Einleitung zum 97. Teil	200
341	Einleitung zum 98. Teil	201
342	Einleitung zum 99. Teil	202
343	Einleitung zum 100. Teil	203



Digitized by the Internet Archive
in 2026

<u>Inhaltsverzeichnis:</u>	Seite
Zusammenfassung	1
Einleitung	3
I Der Ruheabstand dynamischer Systeme	
IA) Klassische Physik	8
IA1) Teilchen ohne Spin	9
IA2) Teilchen mit Spin	10
IB) Der Ruheabstand in der Quantenmechanik	11
IB1) Homogene und inhomogene Lorentz-Transformationen	12
IB2) Unitäre Darstellungen	13
IB3) Ruheabstand in der Quantenmechanik	14
IB4) Kanonische Basis	15
IB5) Ruheabstand für Spin-0 Teilchen	16
IB6) Ruheabstand für Spin-1/2 Teilchen	21
II Die elektromagnetische Struktur relativistischer Systeme	29
IIA) Klassische Physik	29
IIB) Quantenmechanik	31
IIC) Ladungsverteilung allgemeiner Spinsysteme	34
IID) Ladungsverteilung der Pionen	36
IID1) Gesamtladung	37
IID2) Punktförmige Ladungsdichte	38
IID3) Normierte Zustände	39
IID4) Asymptotisches Verhalten des Formfaktors	40
IID5) Der mittlere quadratische Radius	41
IID6) Vergleich mit der unrelativistischen Beschreibung	41
IID7) Mikrokausalität	43
IID8) Unitarität	45

IIE)	Die elektromagnetische Struktur der Protonen	48
IIE1)	Die Gesamtladung	53
IIE2)	Punktförmige Ladungsdichte	
IIE3)	Asymptotisches Verhalten der Formfaktoren	55
IIE4)	Die mittlere quadratische Ausdehnung	55
IIE5)	Mikrokausalität und Unitarität	56
IIE6)	Modelle der Protonenstruktur	59
III	Prüfung der Quantenelektrodynamik	63
	Literaturverzeichnis	68

Bezeichnungen.

Zur Bezeichnung des Energie-Impulsvektors verwenden wir den kontravarianten Vierervektor (c und h werden gleich 1 gesetzt)

$$P^\mu = (P^0, P^1, P^2, P^3) = (E, \vec{P})$$

E ist die Energie, $\vec{P}$ ist der Impuls.

Für den Impuls benutzen wir auch noch die Bezeichnung p^h .

Wir wählen die Metrik

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und benutzen die Einsteinsche Summenkonvention.

Den 4- dimensionalen Momententensor bezeichnen wir mit $T^{\alpha\beta}$.

Die Ladungsdichte $\varrho(z)$ an dem Raumzeitpunkt z_α wird mit dem

Stromvektor $j^k(z)$ zu dem kontravarianten Dichtevektor

$$j^k = (\varrho(z), j^k(z)) \quad k=1,2,3.$$

zusammengefasst. Die elektrische Ladung bezeichnen wir mit Q .

Das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes ist definiert durch

$$A^\mu = (\Phi, A^k) .$$

Als Feldstärken definiert man

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu$$

und das elektrische bzw. magnetische Feld ist in nicht kovarianter Schreibweise gegeben durch

$$E = (F^{01}, F^{02}, F^{03})$$

$$B = (F^{23}, F^{31}, F^{12}) .$$

Wir benutzen die Standardmatrixdarstellung der Dirac - Operatoren

$$\gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

wobei die Komponenten

$$\sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

die bekannten Pauli-Matrizen sind und 1 die 2x2 Einheitsmatrix ist.

Häufig vorkommende Kombinationen der γ_α sind

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = i/2 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 .$$

Neben den γ_μ -Matrizen treten noch

$$\alpha^k = \beta \gamma^k, \quad \beta = \gamma^0$$

auf.

Die Spinkugelfunktionen

$$\varphi_{j,m}^{(+)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\ell+1/2+m}{2\ell+1}} \cdot Y_{\ell}^{m-1/2} \\ \sqrt{\frac{\ell+1/2-m}{2\ell+1}} \cdot Y_{\ell}^{m+1/2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{j,m}^{(-)} = \frac{G \cdot \sigma}{|\mathbf{p}|} \varphi_{j,m}^{(+)} \quad j=1+1/2$$

übernehmen wir aus [20, Seite 64] .

Wir benutzen die Diracsche bracket Schreibweise $|\eta\rangle$. Für die nicht orthogonale Spinorbasis übernehmen wir aus 5 die Schreibweise $|\eta\rangle$. η charakterisiert den Zustand.

Ferner verwenden wir noch:

$$A_{[\alpha\beta]} = A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}$$

$$A_{(\alpha\beta)} = A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

Zusammenfassung.

=====

In der vorliegenden Arbeit wird eine kovariante Dichtestruktur der elektromagnetischen Eigenschaften relativistischer Systeme definiert und untersucht. Im ersten Kapitel wird dazu ein kovarianter Ruheabstand sowohl für Teilchen ohne Spin (I A1) als auch für Systeme mit Spin (I A2) im Rahmen der klassischen relativistischen Physik eingeführt. Nach dem Korrespondenzprinzip entspricht diesem Ruheabstand ein Operator im Hilbert - Raum der quantenmechanischen Zustände, der eng mit den Casimir - Operatoren der homogenen Lorentz - Algebra verknüpft ist (I B1-4). Die Eigenfunktionen dieser Operatoren im Impulsraum werden für Spin 0 und Spin 1/2 neu berechnet in einer Darstellung, die den physikalischen Anwendungen angepaßt ist (I B5;6).

Im zweiten Kapitel werden im Rahmen der klassischen Physik kovariante elektrische Ladungs- und magnetische Dipoldichten definiert (II A). Diesen entsprechen in der Quantenmechanik selbstadjungierte Operatoren (II B;C), deren Matrixelemente in der Ruheabstandsbasis die kovarianten räumlichen Dichten festlegen. Mit den Eigenfunktionen der Casimir - Operatoren lassen sich diese Dichten zu den Formfaktoren in Beziehung setzen (II D;E). Dieser Zusammenhang zeigt, daß für hohe Impulsübertragungen q bei der Elektron - Proton Streuung die dadurch ausgelotete Struktur in der Ruheabstandsbasis von der Ausdehnung $M\lambda^{-1} \sim \ln(-q^2/4M^2)$ ist. Demnach machen sich entsprechende

Strukturen erst bei extrem hohen Energien bemerkbar.

Die Mikrokausalität führt zu einer sehr einfachen Bedingung für die Dichten der Pionen (II D7) und Nukleonen (II E 5) . Die Unitaritätsgleichung im unphysikalischen Bereich und die Resonanzen legen die äussere Zwiebelstruktur der Hadronen (II E 5) fest, wogegen die innere Struktur durch die Singularitäten in den höheren Riemannschen Blättern bestimmt ist . Die gemessenen Formfaktoren können im asymptotischen Bereich durch einen Pol in der x - Ebene parametrisiert werden (II E 6) .

Im dritten Kapitel werden unsere allgemeinen Überlegungen auf die Prüfung der Quantenelektrodynamik angewandt.

Einleitung

=====

In vielen Bereichen der Naturwissenschaften werden Strukturanalysen, insbesondere die Untersuchung räumlicher Materiestrukturen, mit Beugungs- oder Streuexperimenten durchgeführt. Von der Lichtmikroskopie über die Röntgenstrahlen- und Elektronenbeugung an Kristallen und Molekülen bis zur Streuung von Teilchen an Atomkernen wurden auf diese Art immer kleinere Materiestrukturen bis zu Abständen von ungefähr 10^{-13} cm aufgeklärt. Durch Streuung von Elektronengeschossen mit Energien von mehreren GeV, welche in den großen Beschleunigern, wie z.B. bei Desy in Hamburg (6 GeV) oder bei Slac in Stanford (USA) (20 GeV) erzeugt werden, am elektromagnetischen Feld der Atomkerne besonders aber der Elementarteilchen, ist es möglich geworden, das elektromagnetische Feld der Streuquellen im subatomaren Bereich zu messen und damit den Mikrokosmos noch tiefer zu erforschen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem theoretischen Verständnis der heute bereits zahlreich vorliegenden experimentellen Ergebnisse.

In vielen Fällen läßt sich ein Streuprozess durch eine Streuamplitude T beschreiben (Heisenberg [0]), die im allgemeinen aus 2 Anteilen besteht [32]

$$T(\vec{R}) = T_0(\vec{R}) F(\vec{R}).$$

Dabei ist $\vec{k}$ die Impulsänderung des Streugeschosses. T_0 beschreibt die Streuung an Punktverteilungen, z.B. an einem idealisierten Gitter oder an einem Teilchen mit δ artiger Massenverteilung. Der Formfaktor $F(\vec{k})$ berücksichtigt die Ausschmierung der Streuzentren, welche durch eine räumliche Dichteverteilungsfunktion $\varrho(r)$ beschrieben wird. Aus der Spektroskopie und der Bornschen Näherung in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ist der allgemeine Zusammenhang

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r e^{i\vec{k}\vec{r}} \varrho(r) \quad (A)$$

bekannt. Demnach macht sich eine innerhalb des Radius $|r|$ lokalisierte Dichte erst ab Impulsübertragungen von der Größenordnung

$$|k| \cdot |r| \approx 1$$

bemerkbar. Elektromagnetische Strukturen unterhalb der Comptonwellenlänge des Elektrons können also höchstens mit relativistischen Elektronen ausgelotet werden.

Die theoretische Beschreibung dieser Hochenergieprozesse durch die Quantenelektrodynamik führt im wesentlichen wieder zu einer Streuamplitude der Form $T = T_0 \cdot F$. T ist die Streuamplitude bei lokaler, punktförmiger Wechselwirkung des elektromagnetischen Stroms $j_\alpha(z)$ mit dem Photonenfeld $A_\alpha(z)$ mittels der Wechselwirkungs-Lagrangedichte

$$L_w = e j_\alpha(z) A^\alpha(z) ,$$

während F eine eventuelle endliche Quellenausdehnung berücksichtigt. Bei der elastischen Elektron-Hadron-Streuung wird eine solche Struktur vor allem durch die starke Wechselwirkung erzeugt, wobei die Streuung z.B. an der virtuellen Pionenwolke des Nukleons stattfinden kann. Aber auch in der reinen Q.E.D. können solche Abweichungen von der Punktwechselwirkung auftreten.

Obschon die Q.E.D. eine der vollständigsten und in Bezug auf ihre experimentelle Bestätigung erfolgreichsten Theorien ist, bleibt sie nicht frei von inneren Widersprüchen, wie das Auftreten der Ultraviolettdivergenzen zeigt, die zwar durch die aus physikalischen Gründen notwendige Renormierung umgangen werden, jedoch nach einer verbreiteten Meinung nur durch Abänderung der Q.E.D. zu einer nicht lokalen Theorie zu beheben sind. Außerdem wird bei sehr hohen Energien auch bei rein leptonischen Prozessen die Vakuumpolarisation durch Hadronen mit Sicherheit zu Abweichungen von der reinen Q.E.D. führen. H. Salecker [1] hat gezeigt, daß man diese Struktureffekte phänomenologisch durch Formfaktoren berücksichtigen kann.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns zuerst mit der physikalischen Deutung dieser relativistisch invarianten Funktionen $F(q^2)$. Der oben angegebene in unrelativistischen Theorien abgeleitete Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung ρ und Formfaktor F ist bei hochenergetischen Streuprozessen sinnlos. So hängt die Fourier-Transformierte extrem von der Wahl des Bezugssystems ab, in dem man die

dreidimensionale Impulsintegration durchführt. Geht man z.B. von dem Standpunkt aus, daß die räumliche Dichteverteilung ϱ des ruhenden Teilchens durch Fourier-Analyse im Ruhesystem des Targets vor dem Streuprozess (Labor-system) gegeben ist, erhält man

$$\varrho_{\text{lab}}(r) = \frac{4\pi}{r} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty d\tilde{q} |\tilde{q}| \sin \tilde{q} |r| F(q^2)$$

mit

$$\tilde{q}^2 = q^2 \left(1 + \frac{-q^2}{2M^2}\right) \quad q = p_f - p_i$$

p_i, p_f sind die Viererimpulse des einlaufenden bzw. auslaufenden Streuteilchens. M ist die Masse des Targets.

Sehr oft benutzt man die Fourier-Transformation in einem durch $q_0 = 0$ ausgezeichneten Bezugssystem:

$$\varrho_s(r) = \frac{4\pi}{r} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty d|q| |q| \sin |q| r F(q^2)$$

Für $rM \ll 1$ weichen ϱ_{breit} und ϱ_{lab} sehr stark voneinander ab. Da in keinem der betrachteten Fälle das Target eine stationäre Bewegung ausführt, ist die Beziehung der so definierten Funktionen $\varrho_{\text{breit}}, \varrho_{\text{lab}}$ zu wirklichen physikalischen statischen Dichteverteilungen sehr unklar. (Siehe auch [13] Seite 10).

Abgesehen von diesem Problem der physikalisch anschaulichen Deutung einer abstrakten Struktur der Feldtheorie hat der Begriff einer elektromagnetischen räumlichen Dichteverteilung für bestimmte Modelle der hochenergetischen

Hadron-Hadron Streuung wieder an Bedeutung gewonnen.

So führt die Annahme einer universalen Dichteverteilung, die sowohl Träger der hadronischen wie der elektromagnetischen Streuzentren ist, über die damit gegebene Korrelation von elektromagnetischer Dichte $\varrho(r)$ und optischem Potential $\phi(r)$ zu interessanten Verknüpfungen der Lepton-Baryon und Baryon-Baryon Streuung bei hohen Energien.

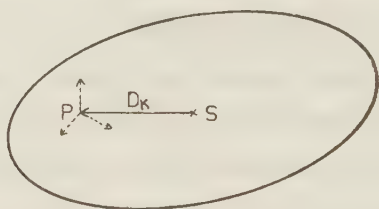
Zum Verständnis des physikalischen Inhalts der Feldtheorien als auch einiger Modellvorstellungen der Hochenergiestreuung kann also die Einführung einer relativistischen räumlichen elektromagnetischen Dichteverteilung sehr nützlich sein.

Ausgehend von der Poincaré Gruppe definieren wir im ersten Kapitel für ein makroskopisches, im zweiten Kapitel für ein quantenmechanisches System einen relativistisch kovarianten Ruheabstand. Anschließend können wir mit diesem Begriff eine kovariante räumliche statische Dichteverteilung der Hadronen festlegen.

I. Der Ruheabstand dynamischer Systeme. =====

A) Klassische Physik.

Die elektrische Struktur eines Teilchens beschreiben wir durch die elektrische Ladungsdichte im Ruhesystem seines Schwerpunktes.



In diesem Bezugssystem legen wir den Koordinatenursprung in den beliebig vorgegebenen Punkt P. Wir betrachten die Ladungsdichte an diesem festgehaltenen Ort. Jeden Teilchenpunkt können wir durch Drehen und Verschieben des Teilchens an die Betrachterstelle P bringen. So kann die gesamte Ladungsstruktur ermittelt werden. Diese Betrachtungsweise läßt sich später leicht in die relativistische Quantenmechanik übertragen. Zur Beschreibung der Teilchenlage benötigen wir den Abstand D^k des Schwerpunktes S von dem Koordinatenursprung P im Ruhesystem. Mit dieser Größe wollen wir uns jetzt näher beschäftigen. Wenn keine äusseren Kräfte wirken, ist D^k eine Konstante der Bewegung. Wir vermuten deshalb einen engen Zusammenhang mit den aus der Lorentz-Invarianz folgenden Erhaltungssätzen. Bekanntlich gelten für ein freies dynamisches System die 10 Erhaltungssätze

$$P_\alpha = \text{Konst.}, \quad I_{\alpha\beta} = \text{Konst.} \quad (I_{\alpha\beta} = 0)$$

P_α beschreibt den Impuls , $\alpha = 0, 1, 2, 3.$ $k, l = 1, 2, 3.$

I_{kl} beschreibt den Drehimpuls ,

$I^{\alpha k} = \text{konst.}$ beinhaltet den Schwerpunktsatz.

I . . Teilchen ohne Spin .

Für Teilchen ohne inneren Drehimpuls gilt

$$I_{\alpha\beta} = x_\alpha P_\beta$$

x^k ist der Ort des Schwerpunktes zur Zeit $t = x^0$.

In diesem Fall ist die Bewegung des Schwerpunktes durch die Erhaltungssätze eindeutig festgelegt.

Aus

$$I^{\alpha k} = \text{konst.}$$

folgt die Bewegungsgleichung

$$x^k = v^k t + I^{\alpha k} \frac{1}{E}$$

mit

$$\frac{1}{E} P^k = v^k .$$

Die Quantisierung dieses momentanen Teilchenortes x^k führt bekanntlich auf große Schwierigkeiten [14, Seite 60]. Da wir an der elektrischen Struktur im Ruhesystem interessiert sind , suchen wir eine kovariante Größe, die in diesem Bezugssystem mit x^k übereinstimmt und die sich aus den Erhaltungssätzen ableiten läßt. Dazu bilden wir den Projektionstensor

$$P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{P_\alpha P_\beta}{P^2}$$

Damit lassen sich Tensoren kovariant in den Teilchenruheraum projizieren. Wir bilden die Größe

$$\begin{aligned} D^\alpha &:= P^\alpha_\beta x^\beta = -(x^\mu P_\mu) P^\alpha \frac{1}{P^2} + x^\alpha \\ &= x^\alpha \frac{P_\mu P^\mu}{P^2} - x^\mu P_\mu P^\alpha \frac{1}{P^2} = x^\mu P_{[\mu} P_{\beta]} P^\beta \frac{1}{P^2} = I^{\alpha\beta} \frac{P_\beta}{P^2} . \end{aligned}$$

Im Ruhesystem gilt

$$D^0 = 0$$

$$D^k = x^k .$$

Damit haben wir einen kovarianten Vektor gefunden, der den Abstand des Schwerpunkts vom Koordinatenursprung im Ruhesystem des Körpers beschreibt. Wir bezeichnen diesen Vektor, der in den nachfolgenden Betrachtungen eine zentrale Rolle spielen wird, als Ruheabstand des Teilchens. Es gilt

$$D_\alpha D^\alpha = \frac{1}{2} I^\beta_\alpha I^\alpha_\beta \frac{1}{P^2} .$$

2. Teilchen mit Spin .

Jeder antisymmetrische Tensor lässt sich nach dem zeitartigen Vektor P_α zerlegen :

$$I_{\alpha\beta} = D_{[\alpha} P_{\beta]} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} W^\mu P^\nu$$

mit

$$W_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} I^{\mu\nu} P^\beta \frac{1}{P^2} , \quad D_\alpha = \frac{1}{P^2} I_{\alpha\mu} P^\mu .$$

$\sqrt{P^2} \cdot W_\alpha$ beschreibt bekanntlich den Drehimpuls im Ruhesystem (Spin).

Zur Deutung von D_α betrachten wir zwei freie spinlose Teilchen .
 Der Gesamtimpuls und der Gesamtmomententensor ergeben sich
 durch Addition der einzelnen $P_\alpha^{(i)}, I_{\alpha\beta}^{(i)}$: (i = 1 ; 2)

$$P_\alpha = P_\alpha^{(1)} + P_\alpha^{(2)}$$

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}^{(1)} + I_{\alpha\beta}^{(2)} .$$

Somit ist

$$D_\alpha = (x_{[\alpha}^{(1)} P_{\beta]}^{(1)} + x_{[\alpha}^{(2)} P_{\beta]}^{(2)}) \frac{P_{(1)}^\beta + P_{(2)}^\beta}{(P_{(1)} + P_{(2)})^2} .$$

Für $t_1 = t_2 = t$ gilt im Ruhesystem

$$(E_1 + E_2) D^\kappa = E_{(1)} x_{(1)}^\kappa + E_{(2)} x_{(2)}^\kappa .$$

Demnach ist D_α die Projektion des von Pryce unter Fall d)
 eingeführten Massenmittelpunktes in den Ruheraum . [2] . Das
 Betragquadrate von D_α ist

$$D^2 = \frac{1}{2} I_\alpha^\beta I_\beta^\alpha \frac{1}{P^2} + W^2 . \quad (A2)$$

Die Projektion von D_α auf W_α ergibt

$$D_\alpha W^\alpha = \frac{1}{8P^2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} I^{\alpha\beta} I^{\mu\nu} . \quad (A3)$$

B) Der Ruheabstand in der Quantenmechanik .

Nach dem Korrespondenzprinzip entspricht dem Ruheabstand
 ein Operator im Hilbert - Raum der quantenmechanischen Zu -

stände . Ein System mit definiertem Ruheabstand wird durch Eigenvektoren dieses Operators beschrieben . Für spätere Anwendungen in der Quantenelektrodynamik bestimmen wir diese Eigenvektoren in der Impulsbasis .

B I) Homogene und inhomogene Lorentz - Transformationen.

Die vollständige homogene Lorentz - Gruppe ist die Menge der linearen Transformationen Λ im Minkowski - Raum

$$x' = \Lambda x$$

welche die quadratische Form $x_\mu x^\mu$ invariant lässt , den vorderen Lichtkegel auf sich abbildet und den Koordinaten - ursprung nicht verschiebt .

Für die erzeugenden Matrizen infinitesimaler Transformationen in der Umgebung der Einheitsabbildung

$$\Lambda = 1 + i \epsilon^{\mu\nu} I_{\mu\nu}$$

gelten folgende Vertauschungsbeziehungen [3] [4] :

$$[I^{\alpha\beta}, I_{\mu\nu}] = -i g_{\mu}^{[\alpha} I^{\beta]}_{\nu}] .$$

$I_{\alpha\beta}$ ist ein antisymmetrischer Tensor bezüglich der oben definierten Transformationen .

Nimmt man noch alle endlichen Verschiebungen des Koordinaten - ursprungs hinzu

$$x' = x + a ,$$

so gelangt man zu der vollständigen inhomogenen Lorentz - Gruppe , auch Poincaré - Gruppe genannt . Die zugeordnete

Poincaré - Algebra ist gegeben durch

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0 \quad (\text{A } 4a)$$

$$[P_\alpha, I^{\mu\nu}] = -ig_\alpha^{\mu\nu} P^\nu \quad (\text{A } 4b)$$

$$[I^{\alpha\beta}, I_{\mu\nu}] = -ig_{[\mu}^{\alpha\beta} I_{\nu]} \quad (\text{A } 4c)$$

Bei Translationen transformiert sich $I_{\alpha\beta}$ gemäss

$$I'_{\alpha\beta} = a_{[\alpha} P_{\beta]} + I_{\alpha\beta} \quad (\text{A } 5)$$

B 2)

Unitäre Darstellungen .

Nach den quantenmechanischen Prinzipien sind die Zustands - mannigfaltigkeiten physikalischer Systeme Hilbert - Räume der unitären Darstellungen der Poincaré - Gruppe . Diese sind seit der wegweisenden Arbeit von Wigner [4] ausführlich untersucht worden . Dazu verweise ich auf den Übersichtsartikel von Joos [5] und stelle hier nur einige Tatsachen zusammen , von denen ich später Gebrauch machen werde .

Die irreduziblen unitären Darstellungen sind nach dem Schur'schen Lemma festgelegt durch die Eigenwerte der bei den Casimir - Operatoren P^2, W^2 und beschreiben physikalische Systeme mit definierter Masse und definiertem Spin . Den erzeugenden Operatoren infinitesimaler Transformationen entsprechen die selbstadjungierten Operatoren $P_\alpha, I_{\alpha\beta}$. Diese Darstellungen der Poincaré - Gruppe sind bezüglich

der homogenen Lorentz- Gruppe reduzibel. Sie lassen sich natürlich nach deren irreduziblen unitären Darstellungen ausreduzieren.

Letztere sind festgelegt durch die beiden Casimir - Operatoren [5]

$$A = \frac{1}{2} I_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \quad ; \quad B = \frac{1}{8} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} I^{\alpha\beta} I^{\mu\nu}, \quad (B\ 3)$$

und zerfallen in zwei Klassen : die Hauptserie und die Neben - serie . Die zweite tritt allerdings in der Ausreduzierung der Poincaré - Gruppe nicht auf , da sie mit einem nichttransla - tionsinvarianten Skalarprodukt verknüpft ist .

B 3) Ruheabstand in der Quantenmechanik .

Zuerst möchte ich noch einmal klarstellen , daß die klassische Größe D_α nicht mit dem vierer Ortsvektor X_α identisch ist , sondern durch die Projektion von X_α in den 3 dimensional en Raum , der orthogonal zu dem Energie - Impulsvektor P_α steht , gebildet wird . In dieser Beziehung ist D_α eine Ver - allgemeinerung des räumlichen Stoßparameters , der durch die Projektion des euklidischen Ortsvektors X^μ in die zweidi - mensionale Ebene senkrecht zur Fortbewegungsrichtung $\delta^\mu \frac{4}{|p|}$ definiert wird .

Nach dem Korrespondenzprinzip ist der Ruheabstand in der Quantenmechanik durch den selbstadjungierten Operator

$$D^\alpha = \frac{1}{2P^2} \{ I^{\alpha\beta}, P_\beta \} \quad (B\ 4)$$

gegeben .

Vergleichen wir die Gleichungen aus der klassischen Physik (A2), (A3) mit denjenigen aus der Quantenmechanik (B3), so erkennen wir :

Der zu einer irreduziblen unitären Darstellung der Poincaré-Gruppe gehörende , bezüglich der homogenen Lorentz - Gruppe

irreduzible Unterraum beschreibt Teilchen mit gegebener Masse M , definiertem Spin , festem Ruheabstandsquadrat und bestimmter Projektion des Ruheabstandes auf den Spinvektor .

Aus der Darstellungstheorie der homogenen Lorentz - Gruppe ist das Spektrum der beiden Casimir - Operatoren (B3) bekannt .

[5] [7] . Jeder Zustandsvektor in dem oben angegebenen Unterraum genügt den Eigenwertgleichungen

$$-D^2 M^2 | \rangle = [X^2 + 1 - \lambda^2 + S(S+1)] | \rangle$$

$$M^2 D_\alpha W^\alpha | \rangle = X \cdot \lambda | \rangle$$

mit

$$0 \leq X$$

$|\lambda| = 0, 1, \dots, S$ für ganzzahligen Spin,

$2 \cdot |\lambda| = 1, 2, \dots, 2S$ für halbzahligen Spin .

Der Aufbau dieses Spektrums legt folgende Definitionen nahe :

λ ist die Quantenzahl der Projektion des Ruhedrehimpulses (Spin) in Richtung des Ruheabstandes .

x ist die Quantenzahl des Ruheabstandsbetrages .

B 4)

Kanonische Basis .

Die Lösungsmanigfaltigkeit der Eigenwertgleichungen

$$P^2 |M S X \lambda \eta\rangle = M^2 |M S X \lambda \eta\rangle,$$

$$M^2 W^2 |M S X \lambda \eta\rangle = -S(S+1) |M S X \lambda \eta\rangle,$$

(B 5 a)

$$M^2 D^2 |M S X \lambda \eta\rangle = d(X \lambda) |M S X \lambda \eta\rangle,$$

$$M^2 D^2 W^2 |M S X \lambda \eta\rangle = X \lambda |M S X \lambda \eta\rangle$$

$$\text{mit} \quad -d(X \lambda) = X^2 + 1 - \lambda^2 + S(S+1)$$

legt den gegenüber homogenen Lorentztransformationen irreduziblen Unterraum fest. Die mit dem Parameter η berücksichtigte Entartung kann durch Ergänzung der Eigenwertgleichungen mit

$$\frac{1}{2} I_{kl} I^{kl} |M S X \lambda j m\rangle = j(j+1) |M S X \lambda j m\rangle$$

(B 5 b)

$$I_{12} |M S X \lambda j m\rangle = m |M S X \lambda j m\rangle$$

aufgehoben werden.

Die Transformationskoeffizienten für den Übergang von der Impulsbasis zu der eben definierten kanonischen Basis sind bereits von mehreren Autoren betrachtet worden [5] [9].

Wir leiten die Eigenfunktionen im Impulsraum auf einem neuen, kürzeren Weg ab, indem wir die Theorie der verallgemeinerten Mehler-Transformation verwenden. Für Spin-1/2 Teilchen gehen wir von der Dirac-Gleichung in der Standard-

darstellung aus . Auf diese Weise kommen wir zu einem geschlossenen Ausdruck, der nur elementare Funktionen enthält und für die anschließenden physikalischen Betrachtungen sehr wertvoll ist .

B 5) Ruheabstand für Spin - 0 Teilchen .

Für $s = 0$ ist ein Darstellungsraum gegeben durch die quadratintegrierbaren Funktionen $\varphi(p)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi \varphi') = \int d^3p \varphi^*(p) \varphi(p) . \quad (B 6)$$

Die Operatoren $I_{\alpha\beta}$ werden dargestellt durch

$$I_{\alpha\beta} = i p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta} .$$

Die Eigenwertgleichungen reduzieren sich auf

$$p^2 \varphi(p) = M^2 \varphi(p) \quad (B 7a)$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta} \right) \left(p_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) - d \right] \varphi = 0 \quad (B 7 b)$$

$$\left[\frac{1}{2} I_\alpha I^\alpha - l(l+1) \right] \varphi = 0 \quad (B 7 c)$$

$$I_{12} \varphi = m \varphi . \quad (B 7 d)$$

Für Lösungen , die physikalischen Teilchen entsprechen , gilt

$$M^2 \gg 0 \quad P_0 \gg 0$$

In pseudosphärischen Kugelkoordinaten

$$p_0 = p \cosh \alpha$$

$$p_1 = p \sinh \alpha \cos \vartheta$$

$$p_2 = p \sinh \alpha \sin \vartheta \sin \varphi \quad (B8)$$

$$p_3 = p \sinh \alpha \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$P > 0 \quad \alpha \gg 0 \quad 0 \leq \vartheta < \pi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem (3.7.)

durch den Produktansatz :

$$\varphi(p) = N(M \ln x) \frac{\sqrt{2}}{M} \delta(p^2 - M^2) \psi_x(\alpha) Y_m(\vartheta, \varphi).$$

φ genügt der Differentialgleichung

$$[-p \square_p + p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} + 3 p \frac{\partial}{\partial p} - d] \varphi_x = 0$$

mit

$$\square_p = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha}.$$

Eine längere Rechnung zeigt

$$\square_p = \frac{1}{p^3} \frac{\partial}{\partial p} p^3 \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{p^2 \sinh \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \sinh^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + L^2 \right]$$

und damit wird der Casimir-Operator A (B3)

$$A = \frac{1}{\sinh^2 \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \sinh^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - L^2 \right) . \quad (B9)$$

Die Substitution $\xi = \cosh \alpha$ führt auf

$$\left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 3\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{l(l+1)}{1 - \xi^2} - d \right] \psi = 0 . \quad (B10)$$

Aus der Orthonormierungsbedingung

$$\int d^3 p \varphi_{(p)}^* \varphi_{(p)} = \delta(M^2 - M'^2) \delta(d - d') \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

mit

$$\int d^3 \Omega Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

folgt für ψ :

$$\int d\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \psi_{x^2}^* \psi_{x'^2} = \delta(d - d') . \quad (B11)$$

Für

$$\chi = (\xi^2 - 1)^{1/4} \psi$$

gilt

$$\left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{(l+1/2)^2}{1 - \xi^2} + v(v+1) \right] \chi = 0 \quad (B12)$$

mit

$$v = -1/2 + ix, \quad d = 1 + x^2$$

und

$$\int_1^\infty d\xi \chi_{x^2}^* \chi_{x'^2} = \delta(x^2 - x'^2) .$$

Zwei unabhängige Lösungen dieser Legendre - Differentialgleichung sind

$$P_{-\frac{1}{2}+ix}^{-(l+\frac{1}{2})}(\xi), \quad Q_{-\frac{1}{2}+ix}^{-(l+\frac{1}{2})}(\xi),$$

wobei die 2 -te Lösung wegen ihrer Singularität an der Stelle

$\xi = 1$ auszuschließen ist. Für die Normierung der Eigenfunktionen gehen wir aus von der verallgemeinerten Mehler - Transformation [11] (Seite 202). Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. $\lambda \gg 0$

Die Umkehrformel der Mehler - Transformationsgleichung führt zu der Beziehung

$$x^2 l!^2 \prod_{n=1}^l (1 + \frac{x^2}{n^2}) \int_1^\infty d\xi P_{-\frac{1}{2}+ix}^{-(l+\frac{1}{2})} P_{-\frac{1}{2}+ix'}^{-(l+\frac{1}{2})} = \delta(x-x') \quad (B 14)$$

mit

$$P_{-\frac{1}{2}+ix}^\mu = [P_{-\frac{1}{2}+ix}^\mu]^*$$

Aus dieser Beziehung können wir die Normierungskonstante bestimmen. Die orthonormierten Eigenlösungen sind

$$\psi_x^l(\xi) = x l! \sqrt{\prod_1^l (1 + \frac{x^2}{n^2})} (\xi-1)^{-1/4} P_{-\frac{1}{2}+ix}^{-(l+\frac{1}{2})} \quad (B 15)$$

Wegen

$$\sqrt{2\pi \sinh \alpha} P_{-\frac{1}{2}+ix}^{-(l+\frac{1}{2})} = i l! \left| \frac{\Gamma(ix)}{\Gamma(l+1-ix)} \right|^2 \left[e^{ix\alpha} P_l^{(ix, -ix)}(\coth \alpha) - e^{ix\alpha} P_l^{(ix, ix)}(\coth \alpha) \right],$$

wobei $P_{(z)}^{(a,b)}$ Jacobi - Polynome sind, nimmt ψ_x^l die Gestalt an

$$\psi_x^l(\xi) = \frac{i l!}{\sqrt{2\pi} \sinh \alpha} \sqrt{\prod_1^l (1 + \frac{x^2}{n^2})} \left[e^{ix\alpha} P_l^{(ix, -ix)}(\coth \alpha) - e^{ix\alpha} P_l^{(ix, ix)}(\coth \alpha) \right] \quad (B 16)$$

Aus der Mehler - Transformation ergibt sich ebenfalls die

Vollständigkeitsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_x(\xi) \psi_x(\xi') = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \delta(\xi - \xi') \quad (\text{B 17})$$

2. Wegen der Selbstadjungiertheit der Operatoren $I_{\alpha\beta}$ ist $X^2 + 1 \geq 0$. Es bleibt also noch der Fall: $0 < X < 1$.

Asymptotisch verhält sich ψ wie

$$\sinh \alpha \psi_x = e^{(1+|x|)\alpha}.$$

Diese Lösungen sind also nicht orthonormierbar.

Für $1 = 0$ ergibt sich die spezielle Lösung

$$\psi_x^0(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x \alpha}{\sinh \alpha} \quad (\text{B 18})$$

B 6) Ruheabstand für Spin - 1/2 Teilchen.

Für $\vec{W}P = 1/2 (1/2 + 1)$ ist ein irreduzibler Darstellungsraum durch die Lösungen der Dirac - Gleichung

$$(\gamma_\mu p^\mu - M) \psi = 0$$

mit der Norm

$$(\psi \psi') = \int \frac{d^3 p}{p_0} \bar{\psi} \psi \quad (\text{B 19})$$

gegeben.

Die Operatoren $I_{\alpha\beta}$ nehmen die Gestalt an

$$I_{\alpha\beta} = i p_{[\alpha} \frac{\partial}{\partial p^{\beta]}} + \frac{i}{4} \gamma_{[\alpha} \gamma_{\beta]} \quad (\text{B 20})$$

Die Eigenwertgleichungen (B 5) reduzieren sich auf

$$(\gamma_\mu p^\mu - M) \psi = 0 \quad (\text{B 21 a})$$

$$\frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} I^{\alpha\beta} I^{\mu\nu} \psi = \kappa \psi \quad (\text{B 21 b})$$

$$\frac{-1}{2} I_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \psi = \lambda \psi \quad (\text{B 21 c})$$

$$\frac{1}{2} I_{kl} I^{kl} \psi = (j+1)j \psi \quad (\text{B 21 d})$$

$$I_{12} \psi = m \psi \quad (\text{B 21 e})$$

auf der positiven Massenschale führen wir wieder pseudo -
sphärische Koordinaten ein . Die allgemeine Lösung von (B 21 d)
und (B 21 e) ist nach [10]

$$\psi = \begin{bmatrix} g^+ \varphi^+ + g^- \varphi^- \\ f^+ \varphi^+ + f^- \varphi^- \end{bmatrix} \quad (\text{B 22 a})$$

mit

$$g = g(\alpha) \quad f = f(\alpha)$$

und

$$\varphi_{jm}^+ = \frac{\sigma \rho}{k} \varphi_{jm}^- \quad , \quad k = \sqrt{p^2}$$

Die 4 Funktionen g^+ , g^- , f^+ , f^- werden mit den 3 Spi -

norgleichungen (B 21 a-c) bestimmt .

Die Dirac - Gleichung läßt sich wegen

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = k \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{k} \otimes A$$

mit der 2×2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

aufspalten in

$$(E - M)(g^+ \varphi^+ + g^- \varphi^-) - k(f^+ \varphi^+ + f^- \varphi^-) = 0$$

$$(E + M)(f^+ \varphi^+ + f^- \varphi^-) - k(g^+ \varphi^+ + g^- \varphi^-) = 0$$

oder

$$(E - M) g^{\pm} - k f^{\mp} = 0$$

$$(E + M) f^{\pm} - k g^{\mp} = 0 .$$

Die Lösungen dieses algebraischen Systems , mit der Auflösungsbedingung $p^2 = M^2$, ist

$$f^{\pm} = \tanh \frac{\alpha}{2} \cdot g^{\mp} . \quad (B 23)$$

g^+ und g^- sind jetzt aus (B 21 b) (B 21 c) zu ermitteln .

Die Darstellung (B20) gibt

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &:= \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \mathbb{I}^{\alpha\beta} \mathbb{I}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} x^{[\alpha} p^{\beta]} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{16} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2} \gamma_5 (3 + \sigma_{\alpha\beta} x^{[\alpha} p^{\beta]}) \cdot (x^{\alpha} = i \frac{d}{dp_{\beta}}) \end{aligned} \quad (B 24)$$

Mit

$$\Sigma_k = \sigma_k \otimes 1 \quad ; \quad L_k = \frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} x^\ell p^m$$

läßt sich $G_{\alpha\beta} X^{[\alpha} p^{\beta]}$ umformen:

$$\frac{1}{2} G_{\alpha\beta} X^{[\alpha} p^{\beta]} = \Sigma \cdot L - i \vec{\alpha} \cdot \vec{p} t + i \vec{\alpha} \cdot \vec{x} E.$$

Wegen

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{x} = (i k^1 L \Sigma + k^1 \cdot \vec{p} \vec{x} + 2 i k^1) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} k^1$$

$$\frac{E}{i k^1} \vec{p} \vec{x} - i p t = i \frac{d}{d\alpha}$$

gilt

$$-i \Pi = \left(\frac{3}{2} + \Sigma L \right) g^- - \left[\coth \alpha (\Sigma L + 2) + \frac{d}{d\alpha} \right] \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} k^1. \quad (B 25)$$

In diesem Ausdruck verknüpft nur der 1. Term große und kleine Komponenten, während der Differentialoperator $\frac{d}{d\alpha}$ nur in dem 2-ten Term auftritt. Das Differentialgleichungssystem (B 25) zerfällt beim Vergleich der skalaren Koeffizienten von φ^+ und φ^- in das gekoppelte Gleichungssystem

$$\left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{J+1}{\sinh \alpha} + \frac{1}{2} \cotgh \alpha \right] g^- - i x g^+ = 0 \quad (B 26a)$$

$$\left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{-J}{\sinh \alpha} + \frac{1}{2} \cotgh \alpha \right] g^+ - i x g^- = 0. \quad (B 26b)$$

Eliminieren wir g^- , so erhalten wir eine Differentialgleichung 2ter Ordnung für g^+

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1 + \cosh \alpha}{\sinh \alpha} \frac{d}{d\alpha} + \frac{1 + 1/2}{\sinh \alpha} (- (j + 1/2) + \cosh \alpha) + \frac{4x+1}{4} \right] g^\pm = 0. \quad (B 27)$$

g^- ergibt sich wegen (B 26) aus g^+

$$g_j^- = g_{j+1}^+.$$

Gleichzeitig muß g^+ ebenfalls die Gleichung (B 21 c) erfüllen . Diese wird bei Berücksichtigung von (B 20)

$$2 \cdot I := I_{\mu} I_{\mu}^{\alpha\beta} \psi = \left[(x_{[\alpha} p_{\beta]})^2 + \frac{1}{4} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} + x^{[\alpha} p^{\beta]} \sigma_{\alpha\beta} \right] \psi = -2Z \psi.$$

Der Term $x p \sigma$ läßt sich , wie aus (B 24) folgt , durch

$\underline{II}$ ausdrücken .

$$- \sigma_{\mu\beta} x^{\mu\alpha} p^{\beta} = 3 + 2i \underline{II}$$

und damit

$$2 \cdot I = \left[(x_{[\alpha} p_{\beta]})^2 - i 2 x^{\alpha} p^{\beta} \right] \psi = 2Z \psi.$$

Bis auf den Term $2ix^{\alpha} p^{\beta}$ erhalten wir also dieselbe Differentialgleichung wie im Fall $w = 0$. Der Spin gibt also einen Zusatzterm der die großen und die kleinen Komponenten miteinander vertauscht .

Mit

$$I_0 := \frac{1}{2} (x_{[\alpha} p_{\beta]})^2 \quad I_0 \varphi^\pm = I_0^\pm \varphi^\pm$$

erhalten wir für die skalaren Koeffizienten von $\varphi^\pm$ in (B 21 c) das Differentialgleichungssystem

$$(I_0^\pm - Z) g^\pm - i x^{\alpha} t g h \alpha \quad g^\mp = 0 \quad \text{---}$$

$$(I_0^+ - z) \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} g^- - i x g^+ = 0. \quad B^+$$

Subtraktion von $\cotgh \alpha/2 \ B^+$ von A^+ reproduziert die Gleichungen (B 26). Eliminieren wir g^- mit (B 26), so wird A^+

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1 + \cosh \alpha}{\sinh \alpha} \frac{d}{d\alpha} + \frac{j + 1/2}{\sinh \frac{\alpha}{2}} (j + 1/2 + \cosh \alpha) + z - 1/2 \right] g^+ = 0. \quad (B 28)$$

(B 28) stimmt mit (B 27) überein , wenn wir

$$Z = x^2 + 1/4 \quad \text{fordern.} \quad (B29)$$

Die Substitution

$$\xi = \cosh \alpha$$

führt (B 28) über in

$$\left[(\xi^2 - 1) \frac{d^2}{d\xi^2} + (1 + 2\xi) \frac{d}{d\xi} + \frac{j + 1/2}{\xi^2 - 1} (j + 1/2 + \xi) + x^2 + \frac{1}{4} \right] g^+ = 0. \quad (B 30)$$

Mit

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \psi_2 = & (g_1^{+*} g_2^+ - f_1^{+*} f_2^+) (\varphi_1^+)^\dagger \varphi_2^+ + (g_1^{-*} g_2^- - f_1^{-*} f_2^-) (\varphi_1^-)^\dagger \varphi_2^- + \\ & + A (\varphi_1^-)^\dagger \varphi_2^+ + B (\varphi_1^+)^\dagger \varphi_2^- \end{aligned}$$

folgt aus dem Skalarprodukt (B 19)

$$(\psi_x \psi_{x'}) = \int_0^\infty d\alpha \sinh \alpha (1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{\alpha}{2}) (g_x^+ g_{x'}^+ - g_x^- g_{x'}^-).$$

Die Normierung

$$(\psi_x \psi_{x'}) = \delta(x - x')$$

ist erfüllt für

$$\frac{1}{4} \delta(x - x') = \int_0^\infty d\beta \sinh^2 \beta g^{+*} g^+ \quad (B 31)$$

mit

$$\beta = \alpha/2 .$$

Für

$$\tilde{g}^{\pm} = (\xi^2 - 1)^{+l/2} \cdot g^{\pm} \quad ; \quad l = j + \frac{1}{2}$$

folgt aus (B 30) die Differentialgleichung

$$[(\xi^2 - 1) d_{\xi} + (1 + 2(1 \mp l) \xi) d_{\xi} + x^2 + \frac{1}{4} + l(l \pm 1)] \tilde{g}^{\pm} = 0 \quad (B 32)$$

oder mit

$$z = \frac{\xi + 1}{2}$$

die hypergeometrische Differentialgleichung

$$[z(1-z) d_z + (-2(1 \mp l) z + (\frac{1}{2} \mp l)) d_z + l(l \pm 1) - x^2 + \frac{1}{4}] \tilde{g} = 0. \quad (B 33)$$

2 unabhängige Lösungen sind [12]

$$\tilde{g}_1^{\pm} = z^{\pm l + \frac{1}{2}} F(1 + ix, 1 - ix, \frac{3}{2} \mp l, 1 - z) N_1^{\pm}$$

$$\tilde{g}_2^{\pm} = (1 - z)^{\pm l - \frac{1}{2}} F(-ix, ix, \frac{1}{2} \pm l, 1 - z) N_2^{\pm} .$$

Die an der Stelle $z = 1$ zulässigen Lösungen

$$\tilde{g}^+ = N^+ (1 - z)^{l - \frac{1}{2}} F(-ix, ix, \frac{1}{2} + l, 1 - z) \quad (B 34a)$$

$$\tilde{g}^- = N^- z^{\frac{1}{2} - l} F(1 + ix, 1 - ix, \frac{3}{2} + l, 1 - z) \quad (B 34b)$$

lassen sich auf elementare Funktionen zurückführen : [12]

$$\tilde{g}^+ = N^+ \coth \beta \sinh^{\frac{2l}{\alpha}} \frac{d^l}{d \cosh^{\frac{2l}{\beta}}} \frac{\cos x \alpha}{\cosh \beta} \quad (35a)$$

$$\tilde{g}^- = N^- \frac{d^{\ell}}{d \cosh^{\ell} \beta} \frac{\sin x \alpha}{\sinh \beta} . \quad (B 35 b)$$

Zur Festlegung der Konstanten $N^+ N^-$ betrachten wir die aus (B 35) folgende Rekursionsformel

$$\tilde{g}_{\ell+1}^- = \frac{N_{\ell+1}^-}{N_{\ell}^-} \frac{d}{d \cosh^2 \beta} \tilde{g}_{\ell}^- \quad (B 36)$$

und benutzen das Normierungsintegral

$$A_{\ell+1} = \int_0^{\infty} d\beta \sinh^2 \beta \sinh^{\ell(\ell+1)} \alpha \tilde{g}_{\ell+1}^{x'} \tilde{g}_{\ell+1}^x .$$

Partielle Integration ergibt

$$A_{\ell+1} = \frac{-N_{\ell+1}^{x'} N_{\ell}^{x'}}{N_{\ell}^2 N_{\ell+1}^2} \int d\beta \sinh^2 \beta \sinh^{\ell} \alpha \frac{\tilde{g}_{\ell+1}^{x'}}{\sinh^2 \beta \sinh^{\ell} \alpha} \frac{d}{d \cosh^2 \beta} \sinh^2 \beta \sinh^{\ell+1} \alpha \frac{d}{d \cosh^2 \beta} \tilde{g} .$$

Mit der Eigenwertgleichung (B 32) eliminieren wir die Ableitungen und reduzieren somit $A_{\ell+1}$ auf A_{ℓ}

$$A_{\ell+1}^- = 4 \frac{N_{\ell+1}^{x'}}{N_{\ell}^{x'}} \frac{N_{\ell}^{x'}}{N_{\ell+1}^{x'}} (x^2 + (j+1)^2) A_{\ell}^- .$$

Mit der Normierung (B 31)

$$A_{\ell+1} = A_{\ell} = \delta(x-x')$$

erhalten wir die Rekursionsformel

$$2 N_{\ell+1}^{x'} = (x^2 + (j+1)^2)^{-\frac{1}{2}} N_{\ell}^{x'} . \quad (B 37)$$

Berücksichtigen wir, daß

$$A_0 = |N_0|^2 \int d\beta \sin x \alpha \sin x \alpha = \frac{\pi |N_0|^2}{4} \delta(x-x)$$

so folgt bis auf eine willkürliche Phase

$$[N]^{-1} = i\sqrt{\pi}$$

und damit die allgemeinen Normierungskonstanten

$$[N_{j,x}^-]^{-1} = i\sqrt{\pi} 2^{j+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi(x^2 + m^2)} . \quad (B 38)$$

Die Gleichung (B 35 b) mit den Normierungskonstanten

(B 38) ist zusammen mit der Gleichung (B 26 a) , die auch in die Gestalt

$$2ix \cdot \tilde{g}_{jx}^+ = \sinh\alpha \left[\frac{d}{d\beta} + 2(j+1) \coth\beta \right] \tilde{g}_{jx}^-$$

gebracht werden kann , die Lösung unserer Eigenwertaufgabe .

Sonderfall $J = 1/2$

Im Hinblick auf spätere Anwendungen bestimmen wir explizit die Lösungen für $j = 1/2$.

$$g_{1/2}^- = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+x^2}} \coth\beta \left[\frac{\sin x\alpha}{\sinh\beta} - 2x \frac{\cos x\alpha}{\cosh\beta} \right]$$

(B 39)

$$g_{1/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+x^2}} \left[\frac{\cos x\alpha}{\cosh\beta} + 2x \frac{\sin x\alpha}{\sinh\beta} \right] .$$

II. Die elektromagnetische Struktur relativistischer Systeme.

In diesem Kapitel untersuchen wir die statische elektrische Ladungs - und magnetische Dipolverteilung relativistischer Teilchen. Der im ersten Kapitel eingeführte Ruheabstand gestattet uns, relativistisch kovariante räumliche Dichteverteilungen zu definieren. Der Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist wieder die klassische Physik.

A) Klassische Physik.

Der Stromvektor $j^*(o)$ bestimmt die elektromagnetischen Eigenschaften am Raumpunkt P zur Zeit $t=0$. Wie in Kapitel 1 legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt P. Dort hängen die elektromagnetischen Dichten nur noch von der Lage des betreffenden Teil-

chens ab. Die elektrische Ladungsdichte ist die Zeitkomponente eines Vierervektors. Um zu einer skalaren Größe zu gelangen, geben wir die Ladungsdichte in einem festgelegten Bezugssystem an. Hier bietet sich natürlich das Ruhesystem des Teilchens an. Wir definieren die Ruheladungsdichte am Nullpunkt wie folgt:

$$\epsilon := \stackrel{p=0}{=} \rho(0) \text{ oder kovariant formuliert: } \epsilon = \frac{1}{\hbar} P_\alpha j^\alpha(0). \quad (1)$$

Die magnetische Dipoldichte am Koordinatenursprung im Ruhesystem des Teilchens ist bekanntlich

$$\mu_k := -\epsilon_{k\ell m} D_j^{\ell m}(0) \quad .$$

μ_k bezieht sich auf den Teilchenschwerpunkt .

In der Atomphysik interessiert uns vor allem die Projektion der magnetischen Momentendichte auf den Spinvektor W_k . Dazu bilden wir im Ruhesystem die normierte Größe

$$\mu := \mu_k \frac{W_k}{W_k W_k} \quad . \quad (2)$$

In einem allgemeinen Bezugssystem definieren wir den Lorentz - Skalar

$$\mu = j_\alpha(0) S^{\alpha\beta} D_\beta \frac{1}{S^2} \quad (3)$$

mit

$$S_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} W^\mu P^\nu = I_{\alpha\beta} - D_\alpha P_\beta \quad .$$

$D_\alpha W_\alpha$ sind in (A 1) eingeführt worden .

Im Ruhesystem reduziert sich (3) auf (2) und ist somit die relativistische Verallgemeinerung von (2) .

Nach dem Korrespondenzprinzip sind ϵ und μ durch entsprechende Operatoren im Hilbert - Raum zu ersetzen . Im allgemeinen können allerdings dabei Mehrdeutigkeiten auftreten .

Außer der Poincaré - Algebra (A 4) folgen aus der Lorentz - Invarianz für die Kommutatoren von P_α, W_α mit dem divergenzfreien Stromoperator j_α die Beziehungen

$$[P_\alpha, j_\beta(z)] = i \frac{\partial}{\partial z^\alpha} j_\beta(z) \quad (4a)$$

$$[I_{\alpha\beta}, j^\mu(0)] = -i g_{\alpha}^{\mu} j_{\beta}(0) \quad (4b)$$

mit

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (5)$$

Nach (4 a) , (5) ist der Operator

$$\epsilon = \frac{1}{M} P_\alpha j^\alpha(0) \quad (6)$$

selbstadjungiert und beschreibt nach (4) die elektrische Ladungsdichte am Koordinatenursprung im Ruhesystem des Teilchens .

Die magnetische Momentendichte ist korrespondenzmäßig durch den Operator

$$2\mu = j^\alpha(0) S_{\alpha\beta} D^{\beta} \frac{1}{S} + \text{Adj.} \quad (7)$$

gegeben .

Zur Untersuchung der willkürlichen Reihenfolge der Operato -

ren $j_\alpha, I_{\alpha\beta}, P_\alpha$ beschränken wir uns auf den Hilbert - Raum

$$P^2 | \rangle = M^2 | \rangle \quad W^2 | \rangle = S(S+1) | \rangle$$

und setzen die Operatoren explizit ein

$$4S(S+1)\mathcal{M} = j_\alpha I^{\alpha\beta} I_{\beta\mu} P_\mu^{\mu 1} \frac{1}{M^2} + j^\alpha P_\alpha \frac{1}{2M^2} I_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta} + \\ + 3i j_\alpha D^\alpha + S(S+1) j^\alpha P_\alpha \frac{1}{M^2} + \text{Adj.}$$

Eine große Anzahl weiterer Operatoren $\mathcal{M}$ erhalten wir, in dem wir die Reihenfolge der Operatoren $j_\alpha, I_{\alpha\beta}, P_\alpha$ beliebig verändern. In den einzelnen Termen treten maximal 2 Faktoren I und ein Faktor P auf. Jedes vierer Produkt läßt sich ausdrücken durch $\mathcal{M}$ und eine Anzahl von Produkten in denen die Kommutatoren $[j_\alpha, I_{\mu\nu}]$, $[I_{\alpha\beta}, I^{\mu\nu}]$, $[P_\alpha, I^{\mu\nu}]$, nicht aber $[j_\alpha, P_\beta]$ auftreten, z. B.

$$I_{\alpha\beta} j^\alpha I^{\beta\mu} P_\mu = j^\alpha I_{\alpha\beta} I^{\beta\mu} P_\mu + [I^{\alpha\beta}, j_\alpha] I_\beta^\mu P_\mu,$$

Wenn j_α links von P_α steht, verschieben wir es durch Kommutatorbildung an die erste Stelle; steht es rechts von P_α , so verschieben wir es nach rechts an die letzte Stelle. Wegen (4 b) und der Poincaré - Algebra tritt in den Zusatztermen zu $\mathcal{M}$ ein $I_{\alpha\beta}$ weniger auf. In unserem Beispiel ist

$$[I^{\alpha\beta}, j_\alpha] I_\beta^\mu P_\mu = -3i j^\beta I_\beta^\mu P_\mu.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf alle Terme der $\mathcal{M}$ an, erhalten wir die allgemeine Beziehung

$$s(s+1)\mu_i = s(s+1)\mu + ia_i(j_\alpha I_\alpha^\mu P_\beta - P_\beta I_\alpha^\mu j_\alpha) + b_i\{j_\alpha^\mu P_\alpha\}. \quad (8)$$

Die reellen Zahlen a_i, b_i hängen nicht von s ab und charakterisieren die Mehrdeutigkeiten des quantenmechanischen Ausdrucks. Um die a_i, b_i weiter einzuschränken, gehen wir jetzt näher auf die Dichteverteilungen spinloser Teilchen ein.

Mit dem Matrixelement (10) des Atoms für spinlose Teilchen ergibt sich durch Einschieben eines vollständigen Zwischenzustandsystems in das Matrixelement $\langle p_f | j_\alpha^\mu I_\alpha^\mu P_\mu | p_i \rangle$

$$\begin{aligned} \langle p_f | j_\alpha^\mu I_\alpha^\mu P_\mu | p_i \rangle &= \sum_n \langle p_f | j_\alpha^\mu | n \rangle \langle n | I_\alpha^\mu P_\mu | p_i \rangle \\ &= -i \sum_n p_\beta^{(n)} p_{\alpha}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_{(n)}} \langle p_f | j_\alpha^\mu | p_i \rangle \\ &= 3im^2 F - i((p^* p^*)^2 - M^4) \frac{d}{d(p^* p^*)} F. \end{aligned}$$

F ist der skalare Formfaktor (10).

Wegen $s = 0$ müssen wir also fordern:

$$0 = a_i \left\{ -6m^2 F + [(p p^*)^2 - M^4] \frac{d}{d(p p^*)} F \right\} + b_i (p_i + p_i^*)^2 F.$$

Für beliebiges F folgt daraus $a_i = b_i = 0$.

Die magnetische Momentendichte wird also eindeutig durch den in (7) definierten Ausdruck μ beschrieben.

Aus (4b) und (A4) können wir die wichtigen Kommutatoren

$$[I_{\alpha\beta}, \epsilon] = 0, \quad [I_{\alpha\beta}, \mu] = 0 \quad (9)$$

ableiten .

0 Ladungsverteilung allgemeiner Spinsysteme .

Durch Experimente lassen sich die Matrixelemente des Operators $J_\mu(0)$ in der Impulsbasis bestimmen .

$$\langle p_i, h_i | J_\mu | p_f, h_f \rangle =: J_\mu .$$

p_i ist der Impuls des Anfangszustandes , p_f ist der Impuls des Endzustandes. h_i und h_f entsprechen den Helizitäten [14, Seite 83].

Aus Invarianzgründen hängen die Matrixelemente nicht von allen Variablen ab . Für Spin - 0 Teilchen ist nach [30]

$$\langle p_i | J_\mu | 0 \rangle | p_f \rangle = (p_\mu^{(i)} + p_\mu^{(f)}) F_\Gamma(q^2) \quad (10)$$

mit

$$q_\alpha = p_\alpha^{(f)} - p_\alpha^{(i)} .$$

Für Spin - 1/2 Teilchen gilt [31]

$$\langle p A | J_\mu | 0 \rangle | p B \rangle = g_\mu F_1 + i \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) . \quad (11)$$

$A, B = 0, \dots, 5$ sind die Indizes der kovarianten nicht orthogonalen Spinorbasis .

J_μ kann also auf skalare Funktionen einer Variablen zurück - geführt werden . $F_i(q^2)$ bezeichnet man als Formfaktoren . Sie sind Spezialfälle der invarianten Amplituden , die allgemein in der Streutheorie eingeführt werden .

Gebundene Systeme , die z.B. mit der Bethe - Salpeter - Gleichung beschrieben werden , können unter Umständen einen sehr großen Eigendrehimpuls besitzen . In diesem Fall ist die Benutzung der Formfaktoren zur Beschreibung der elektromagnetischen Struktur , welche durch die Theorie von Mandelstam [22] definiert ist , nicht angebracht .

Erstens steigt die Anzahl der Formfaktoren gemäß der größer werdenden Spineinstellungsmöglichkeiten rasch an . Die Fülle der Funktionen einer Veränderlichen erschwert eine übersichtliche Formulierung und verwischt den physikalischen Inhalt von J_μ .

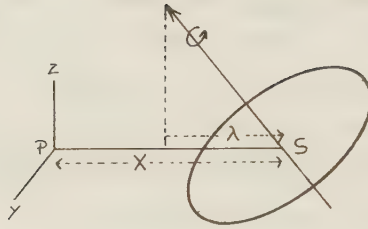
Zweitens erwarten wir im Rahmen der Bethe - Salpeter - Gleichung einen Zusammenhang der J_μ mit verschiedenen Helizitäten , z.B. im Sinne der analytischen Fortsetzung . Wahrscheinlich sind derartige Beziehungen mit Formfaktoren nur sehr umständlich zu beschreiben.

Um die Formfaktoren in übersichtliche Klassen einzuordnen , bilden wir die Matrixelemente von ϵ und μ in der in Kapitel I eingeführten kanonischen Basis .

Diese Matrixelemente besitzen wegen den Vertauschungsbeziehungen (9) und der Lorentz- Invarianz eine einfache Form. Es gilt für $\langle \epsilon \rangle$ bei vorgegebener Masse und festem Spin

$$\langle M_{s \ x \lambda \ j m} | \epsilon | M_{s \ x' \lambda' \ j m'} \rangle = \delta(x-x') \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} g(x, \lambda) \quad (11)$$

$g(x, \lambda)$ ist die statische räumliche Ladungsdichte am Koordinatenursprung , x der Ruheabstand des Schwerpunktes und λ die Projektion des Spins in Richtung des Ruheabstandes.



Damit haben wir das Matrixelement auf zwei skalare Funktionen

$\varphi_e(x, \lambda)$ und $\varphi_\mu(x, \lambda)$ von 2 Veränderlichen zurückgeführt. x ist ein kontinuierlicher, λ ein diskreter Parameter.

Im klassischen Grenzfall nehmen x und s sehr große Werte an.

$$x \gg s \gg 1.$$

λ wird dabei zu einem kontinuierlichen Parameter:

$$\lambda = s \cdot \cos \vartheta.$$

$\varphi(x, \lambda)$ geht über in die rotationssymmetrische Ladungsverteilung eines ausgedehnten makroskopischen Körpers $\varrho(\vec{r})$ mit

$$|\vec{r}| = x \frac{1}{M} \quad \vec{W} \cdot \vec{r} = x s \cos \vartheta.$$

r ist der Abstand des Körperpunktes P von dem Schwerpunkt S .

D) Ladungsverteilung der Pionen.

Um den Zusammenhang des Pionen Formfaktors $F_q(q^2)$ (10) mit der räumlichen Ladungsdichte $\varrho(x)$ herzustellen, integrieren wir

die mit x' multiplizierte Gleichung (11)

$$x' \langle x' | \epsilon | x \rangle = x' \delta(x - x') \varrho(x)$$

über x' so gilt

$$x \varrho(x) = \int dx' x' \langle x' | \epsilon | x \rangle$$

Nach (B18) ist $\psi_{x'}^0(\alpha=0)\sqrt{\pi/2} = x'$ und das Integral läßt sich umschreiben

$$x \varrho(x) = \int dx' \langle x' | \epsilon | x \rangle \psi_{x'}^0(\alpha=0) \sqrt{\pi/2}.$$

Die Vollständigkeit der D^2 Eigenfunktionen führt auf

$$x \varrho(x) = \sqrt{\pi/2} \langle p'=0 | \epsilon | x \rangle.$$

In diese Gleichung schieben wir ein vollständiges Impuls-eigenfunktionssystem ein:

$$= \sqrt{\pi/2} \int d^3p \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^2}} \langle p'=0 | \epsilon | p \rangle \psi_x^0(p).$$

Wir setzen die Definition von ϵ (6) ein und benutzen Gleichung (10). Integration über den Winkelanteil führt auf

$$x \varrho(x) = 4\pi \int_0^\infty d\alpha \sin x\alpha E(q^2) \sinh\alpha.$$

mit (13)

$$E := \langle p' | \epsilon | p \rangle = \frac{1}{2M} (4M^2 - q^2) E_\pi(q^2) \quad (13a)$$

Die Umkehrformel lautet:

$$(2\pi)^{3/2} E(q^2) \sinh\alpha = \sqrt{2/\pi} \int dx \sin x\alpha x \varrho(x) \quad (14)$$

mit $q^2 = 2M^2(1 - \cosh\alpha).$

Gesamtladung.

Für die Gesamtladung Q , die in der Impulsbasis mit unserer kovarianten dimensionslosen Normierung durch

$$Q = \frac{2(2\pi)^3}{M^2} E(0)$$

gegeben ist, erhalten wir in der Ruheabstandsbasis

$$Q = \frac{(2\pi)}{M^3} E(0) = 4\pi \int_0^\infty d\frac{x}{M} \left[\frac{x}{M}\right]^2 \varrho(x) . \quad (15)$$

Dieses Integral entspricht der klassischen **winkelunabhängigen** Integration der Ladungsdichte über den ganzen Ruheraum.

D 2) Punktförmige Ladungsdichte .

In der klassischen Physik ist die Ladungsdichte eines Punktteilchens im Ruhesystem

$$\varrho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r}),$$

oder für kugelsymmetrische Testfunktionen

$$\varrho(r) = Q \frac{1}{8\pi} \frac{d^2}{dr^2} \delta(r) .$$

Der Begriff der räumlichen, punktförmigen Ausdehnung läßt sich kovariant in die Quantenmechanik übertragen

$$\varrho_p(x) = Q \frac{M^3}{8\pi} \frac{d^2}{dx^2} \delta(x)$$

und entspricht dem Formfaktor

$$\frac{1}{E_p(0)} E_p(q^2) = \frac{\alpha}{\sinh \alpha} .$$

Er unterscheidet sich von dem feldtheoretischen Begriff der punktförmigen oder lokalen Wechselwirkung, wie z.B. in der elektromagnetischen Wechselwirkungsichte:

$$L_w(z) = e^{j_w(z)} \cdot A^*(z) .$$

In diesem Fall bedeutet Z ein Raumzeitpunkt und die niedrigste störungstheoretische Ordnung führt zu einem konstanten F_w :

$$\frac{1}{F(0)} F(q^2) = 1 .$$

Eine einfache kovariante Deutung dieses Formfaktors ist nur durch eine 4 dimensionale Fourier-Transformation

$$\frac{1}{F(0)} \tilde{G}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqz} = \delta^4(z)$$

möglich . Die Dichte entspricht einer Quelle, die sowohl im Raum wie auch in der Zeit punktförmig ist .

· D 3) Normierte Zustände .

Für das Matricelement von ϵ mit normierten Zuständen φ

$$(\varphi, \varphi) = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \varphi^* \varphi = 1 \quad (*)$$

ergibt sich in der Impulsbasis

$$\langle \varphi | \epsilon | \varphi \rangle = \int d^3p_f d^3p_i \varphi^*(p_f) \varphi(p_i) E(q).$$

$\varphi(p)$ fällt asymptotisch mindestens ab wie $|p|^{-1}$. Die Wellenfunktion $\langle \varphi | \times l^m \rangle$ existiert . Das Matricelement $\langle \varphi | \epsilon | \varphi \rangle$ kann in der kanonischen Basis ausgedrückt werden , wo es die diagonale Gestalt

$$\langle \varphi | \epsilon | \varphi \rangle = \int_0^\infty dx \, x \rho(x) \sum_{lm} |\langle \varphi | x | m \rangle|^2$$

annimmt. Für $\varphi = \varphi(l, m)$ ist $\langle \varphi | x | l, m \rangle = 0$ wenn $l, m \neq 0$ und es gilt

$$\langle \varphi | \epsilon | \varphi \rangle = \int_0^\infty dx \, x \rho(x) |a(x)|^2, \quad a = \langle \varphi | x | 0, 0 \rangle$$

D 4) Asymptotisches Verhalten des Formfaktors .

Wenn $E(q^2) \sinh \alpha$ asymptotisch nicht ansteigt, existiert die Transformation (13), und damit $\langle \varphi | \epsilon | \varphi \rangle$. In diesem Fall ist der Operator der Ruheladungsdichte ϵ auf dem Raum aller die Norm (*) erfüllenden Funktionen definiert. Steigt $E(q^2) \sinh \alpha$ dagegen asymptotisch an, so kann $\times \rho$ nur noch im Sinne der analytischen Distributionen definiert werden und entzieht sich damit einer anschaulichen physikalischen Deutung. Für $F(q^2) = \text{konst.}$ ergibt sich [3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(0)} \times \rho(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty d\alpha \sin x \alpha \sinh \alpha \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{2} \delta(x-2i) - \frac{1}{2} \delta(x+2i) + \delta(x-i) - \delta(x+i) \right] \end{aligned}$$

Leider liegen noch keine experimentellen Ergebnisse über das asymptotische Verhalten des Pionen-Formfaktors vor. Wie wir später sehen werden, ist die Ladungsverteilung der Nukleonen, die sich aus den Messungen ergibt, eine nicht singuläre gewöhnliche Funktion. Bedenken wir ferner, daß Ladungsverteilungen mit $\delta(x^2+a^2)$ Singularitäten experimentell bis jetzt noch nicht gefunden wurden, so scheint es uns vernünftig für Pionen eine nichtsinguläre elektrische Struktur zu erwarten. Bis auf Faktoren

$\ln(-q^2/M^2)$ verläuft der Formfaktor dann asymptotisch wie

$$F(q^2) = c q^{-4}$$

oder unterhalb davon wie aus Gleichung (13) und (13a) folgt.

D 5) Der mittlere quadratische Ruheabstand.

In der klassischen Physik lassen sich ausgedehnte Ladungswolken $\varrho(r)$ teilweise durch die Momente der Ladungsverteilung charakterisieren. Für genügend glatte winkelsymmetrische Funktionen $\varrho(r)$ ist z.B. der mittlere quadratische Radius

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{Q} \cdot \int dr \varrho(r) r^2$$

ein Maß für die Ausdehnung der Wolke. Dazu ist allerdings erforderlich, daß die höheren Momente der Ladungsdichte sehr klein sind.

In Analogie zu dieser klassischen Größe definieren wir in der relativistischen Quantenmechanik den mittleren quadratischen Ruheabstand

$$\frac{1}{M^2} \bar{x}^2 := \frac{4\pi}{Q} \int_0^\infty d\frac{x}{M} \frac{x^2}{M^2} \varrho(x) \frac{x^2}{M^2} = 6 \frac{d}{dq^2} F(0) - \frac{5}{2} \frac{1}{M^2}. \quad (16a)$$

Er ist ein Maß für die Abweichung der Ladungsdichte des Pions von der punktförmigen Verteilung $E_p(\alpha)$, wie wir an der Taylor-Entwicklung von $E(\alpha)/E_p$ nach α feststellen können

$$\frac{1}{E_p(q^2)} E(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \bar{r}^2 \alpha^2 M^2 + O(\alpha^4), \quad (16b)$$

mit

$$-q^2 = \alpha^2 M^2 + O(\alpha^4).$$

D 6) Diskussion der räumlichen Ladungsverteilung.

In der Einleitung haben wir bereits darauf hingewiesen, daß in der unrelativistischen Quantenmechanik der Zusammenhang zwischen dem Formfaktor $F(q^2)$ und der Ladungsverteilung $e(r)$ durch die dreidimensionale Fourier-Transformation gegeben ist. Demnach gilt für Pionen im Bereich

$$-q^2 \ll M^2 \quad (18)$$

die Gleichung

$$e(r) = \frac{2}{M^2} \int d^3q F(q^2) e^{i\vec{q}\vec{r}} = \frac{2}{M^2} \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty dq \tilde{q} \sin r\tilde{q} F(q^2). \quad (17)$$

Wir können die Formel (13) als eine relativistische Verallgemeinerung von (17) auffassen. Dabei scheinen uns zwei Punkte besonders erwähnenswert.

a) In der Gleichung (13) transformieren wir das Matrixelement $E(\alpha)$ der Ruheladungsdichte (Siehe Seite 37), und nicht $E(q^2)$.

b) Das Argument der Sinusfunktion ist in der Formel (13) im Bereich $-q^2 \gg m^2$

$$\left[x \ln \frac{-q^2}{4M^2} \right], \quad (19)$$

und nicht etwa $x\sqrt{q^2/M^2}$.

Daraus ergibt sich eine interessante Schlußfolgerung für die Interpretation der Formfaktormessungen.

Sei $\tilde{E}(\alpha)$ ein Beitrag zu $E(\alpha)$ der einer sehr kleinen Ladungsausdehnung

$$d \ll \frac{1}{M}$$

in der Ruheabstandsbasis entspricht. Die Entwicklung (16b)

$$\frac{1}{E_p} \tilde{E}(\alpha) = 1 - \frac{1}{6} d^2 M^2 \alpha^2 + O(\alpha^4)$$

zeigt, daß sich dieser Anteil erst ab einem Impulsübertrag

$$-q^2 \approx M^2 e^{M/d}.$$

bemerkbar macht.

Demnach ist es zur Bestimmung von Strukturen mit einer geringen Ruheabstandsausdehnung erforderlich, den Formfaktor bis zu extrem hohen $-q^2$ zu messen. Um den ausgeloteten Ruheabstand um eine Größenordnung zu verkleinern, ist es notwendig, den Impulsübertrag um den Faktor 150 zu vergrößern. Die Ausmessung der Ladungsdichte der Pionen bei kleinen Ruheabständen wird also sehr schwierig sein. Andererseits können bei diesen Abständen noch sehr interessante Effekte auftreten.

D 7)

Mikrokausalität

Wenn es auch bis heute noch nicht möglich ist, den Formfaktor der Pionen exakt zu berechnen, so kann man doch aus den allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik Aussagen über den Verlauf von $F(q^2)$ und damit auch über die Ladungsverteilung herleiten.

Aus der Mikrokausalität folgt bekanntlich [14], daß $F(q^2)$ und damit auch $E(q^2)$ eine in der komplexen q^2 -Ebene, mit Ausnahme der positiven Halbachse, analytische Funktion ist. Wir nehmen in den folgenden Betrachtungen eine unsubtrahierte Dispersionsbeziehung für die Ladungsverteilung $E(q^2)$ an:

$$E(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Im} E(s')}{s' - s} \quad (22)$$

$$s = 2M^2(1 - \cosh \alpha), \quad (22a)$$

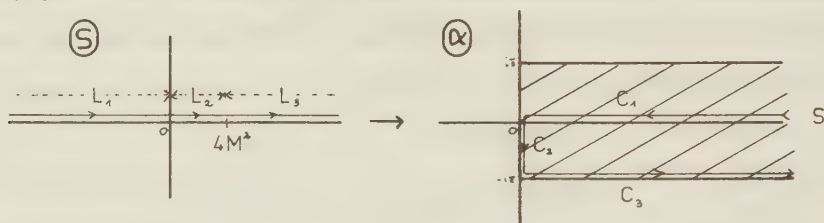
setzen sie in die Transformationsformel (13) ein und vertauschen die Reihenfolge der Integrationen :

$$x \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \operatorname{Im} E(s') K(s'x) \quad (23)$$

mit

$$K(s'x) = \frac{4\pi}{2M^2} \int_0^{\infty} d\alpha \sin \alpha \frac{1}{s' - s} \quad (24a)$$

$s - 2M^2(1 - \cosh \alpha) = 0$ definiert eine eindeutige Abbildung der komplexen s -Ebene auf den Steifen S der komplexen α -Ebene



und bildet den orientierten Weg L auf die Schleife C ab,

Die Integration in (23) erstreckt sich über C_3

$$K(s'x) = \frac{4\pi}{2M^2} \int_0^{\infty} d\alpha \sin \alpha \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha + \cosh \gamma'} \quad (24b)$$

$$\alpha = +i\gamma - i\pi$$

Mit dem Residuensatz ergibt sich

$$2M^2 K(s'x) = (2\pi)^* \frac{\cos x \gamma'}{\sinh \pi x} \quad (25)$$

und damit

$$x \varphi(x) = \frac{4\pi}{\sinh \pi x} \int_0^{\infty} d\gamma \cos x \gamma \sinh \gamma \operatorname{Im} E(s) \quad (26)$$

Die Funktion

$$g(x) = x \varphi(x) \sinh \pi x$$

ist also Fourier - integrierbar.

Nehmen wir umgekehrt an , daß $g(x)$ Fourier - integrier -
bar ist, so überzeugt man sich leicht mit der Umkehrformel

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} E(q^2) \sinh \alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx \sin x \alpha \frac{g(x)}{\sinh \pi x}, \quad (27)$$

daß $E(q^2)$ in der ganzen q^2 - Ebene, mit Ausnahme der zeit -
artigen physikalischen Achse , analytisch ist.

Die Mikrokausalität verlangt also , daß die räumliche La -
dungsverteilung asymptotisch mindestens wie $e^{-\pi x}$ abfällt,
und ist damit im Gegensatz zur Impulsbasis in der Ruhe -
abstandsbasis sehr einfach formulierbar.

D 8)

Unitarität.

Die Schwellen der verschiedenen Kanäle erzeugen bekanntlich
Verzweigungspunkte von $E(q^2)$ auf der positiven reellen s -
Achse. Durch die Abbildung $s - 2M^2(1 - \cosh \alpha) = 0$ werden diese
Singularitäten zum großen Teil in die α - Ebene übertragen.

Die einzigen Verzweigungspunkte, die nicht mehr in der α - Ebe -
ne auftreten, sind von der Gestalt $\text{arcosh}(s - s_A)$. Leider ist
die jeweilige uniformisierende Funktion der Singularitäten
des exakten Formfaktors nicht bekannt. Die arcosh - Verzwei -
gungen wollen wir von erster Art, alle anderen von zweiter
Art bezeichnen.

Nehmen wir an, daß $g(x)$ exponentiell abfällt, dann können
wir $E(s)$ durch die Integralformel (27) analytisch über

die q - π -Achse fortsetzen. Demnach wären alle Singularitäten erster Art.

Die einzelnen Verzweigungspunkte zweiter Art verhindern also, daß $\rho(x)$ exponentiell stärker abfällt als die Kausalität verlangt. Sie geben Beiträge, die unabhängig von der Lage der Schwellen über die ganze Compton-Wellenlänge ausgedehnt sind.

Die räumliche Struktur der Pionen ist nicht durch die Lage der Schwellen bestimmt, sondern durch die Singularitäten in der α -Ebene, wie wir das jetzt für den Beitrag der Resonanzen sehen werden.

Der Beitrag der 2 Pionen-Resonanzen zur räumlichen Ladungsverteilung ergibt sich in dem unrelativistischen Bereich

$$\text{aus der Fourier - Transformation des Pols } \frac{1}{s - M_R^2} :$$

$$\rho(r) \sim \int_0^\infty dq q \frac{\sin qr}{q^2 + M_R^2} \approx \frac{e^{-M_R r}}{r} \quad (28)$$

Der asymptotische Abfall ist also durch die Masse der Resonanz bestimmt und kann je nach Lage der Resonanzspitze beliebig stark sein.

Der Polformel entspricht dagegen, wie man aus (24), (25) ersieht, die relativistische Ladungsverteilung

$$\rho(x) \sim \frac{\cosh \eta_R}{\sinh \pi x}$$

mit:

$$M_R^2 = 2M^2(1 + \cosh \eta_R)$$

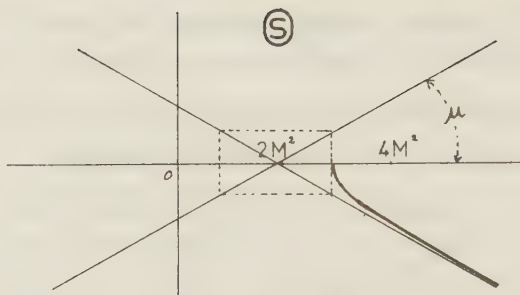
Diese fällt asymptotisch nur wie $e^{-\pi x}$ ab.

Allerdings müssen wir dabei berücksichtigen, daß der Polausdruck nur eine genäherte Form des Resonanzbeitrags ist. Nutzt man die Zweiteilchen-Unitarität vollständig aus, so tritt in der Unitaritätsgleichung neben dem Formfaktor selbst die Streuphase der elastischen π - π Streuung auf [16]. Beschränkt man sich auf kleine Energien, so ist es vernünftig, wie H. Sallerker [17] explizit durchgeführt hat, für die Streuphase einen "effective-range" Ansatz zu machen. Der so berechnete Formfaktor ist eine echte Resonanzkurve mit einem Wurzelverzweigungspunkt an der physikalischen Schwelle und einem Pol im unphysikalischen Blatt. Verbesserungen dieser Näherung, wie z. B. die von Gounaris und Sakurai [18], führen auf ein qualitativ ähnliches Ergebnis. Diesen Formfaktoren können durchaus räumliche Ladungsverteilungen entsprechen die stärker abfallen als $e^{-\pi x}$.

Eine untere Grenze ergibt sich aus der Lage der Singularität im unphysikalischen Blatt. Liegt der Pol an der Stelle

$$M_R^2 + i M_R \Gamma_R = 2 M^2 (1 + \cosh(\mu_R + i \mu_i))$$

mit $\alpha_R = \mu_R - i \mu_i - \pi$, so darf $\varrho(x)$ nicht stärker als $e^{-(\pi + \mu_i)x}$ abfallen. Anderenfalls könnte man mit Hilfe der Integraldarstellung (14) $E(s)$ analytisch über s_R hinaus fortsetzen. Singularitäten mit demselben asymptotischen x -Verhalten liegen auf einem Hyperbelzweig im unphysikalischen Blatt unterhalb der reellen Achse.



Resonanzen an der positiven reellen Achse können nur für $\mu \leq \frac{\pi}{2}$ auftreten. Ohne näher auf die Gestalt der Resonanzkurve $F(\lambda)$ eingehen zu müssen, können wir den allgemeinen Schluß ziehen, daß die Resonanzen höchstens den äusseren Bereich der räumlichen Ladungsverteilung beeinflussen, wobei neben der Masse die Lebensdauer die jeweilige Ausdehnung im wesentlichen bestimmt.

Exponentiell stärker abfallende räumliche Ladungsdichten ergeben Formfaktoren, deren Singularitäten in der α Ebene immer weiter vom physikalischen Streifen wegrücken. In der komplexen s -Ebene sind diese Funktionen analytisch bis auf einen Verzweigungspunkt im zeitartigen Bereich und einer Singularität in einem höheren Riemann - Blatt.

E) Die elektromagnetische Struktur der Protonen.

Die elektrische Ladungs - und die magnetische Dipolverteilung des Protons sind durch die Matrixelemente der Operatoren ϵ und μ , die in (6) und (7) definiert wurden, gegeben. In der Spinorimpulsbasis gilt für das Matrixelement des

Stromoperators indem wir (10) mit der Dirac-Gleichung umformen

$$(p_f | j_{\alpha} | p_i) = G_{\alpha} \delta_{fi} + \frac{2M}{P^2} P_{\alpha} (G_e - G_n)$$

mit

$$P_{\alpha} = p_{\alpha}^{(p)} + p_{\alpha}^{(u)}$$

$$G_e = F_1 + \frac{t}{4M^2} F_2$$

$$G_n = F_1 + F_2 .$$

F_1 , F_2 sind der Dirac - b.z.w. der Pauli - Formfaktor .

G_e , G_n wurden von Ernst, Sachs und Wali auf Grund von einer sich auf die unrelativistische Physik stützende Argumentation als die Formfaktoren der elektrischen Ladungs - b.z.w. magnetischen Momentenverteilung eingeführt [19] .

Für das Matricelement der Ruheladungsdichte ϵ (6) ergibt sich aus (6) und durch Anwendung der Dirac-Gleichung

$$(p_f | \epsilon | p_i) = G_e 1 . \quad (29)$$

Mit

$$S_{\alpha\beta} | p) = (x_{\alpha} p_{\beta} + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{M^2} I_{\alpha\beta}^{\mu} p_{\mu}) | p)$$

erhalten wir für das Matricelement Γ' des in (7) auftretenden " transformierten Stroms "

$$\Gamma'_{\alpha} = (p_f | j'_{\alpha} | p_i) , \quad j'_{\alpha} = j_{\beta} S^{\beta}_{\alpha}$$

$$-i\Gamma'_\alpha = A f_\alpha + B p_\alpha + C q_\alpha . \quad (30)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= G_e + G_n ; \quad C = \frac{1}{2M} G_- \\ -2B &= \frac{1}{M} G_n + \frac{2M}{p^2} (G_e - G_-) \end{aligned} \quad (31)$$

ist.

Wegen

$$(k | I_{\alpha\beta} | p) = (-i p_\beta \frac{d}{dp_\beta} + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}) \delta^+(p-k)$$

ergibt sich das Matricelement von μ durch Einschreiben eines Zwischenzustandsystems in $(p | j_\alpha D^\alpha | p)$ und Integration über die Impulse p^α

$$M^i(p | j_\alpha D^\alpha | p) = -i p^\beta p_\beta \frac{d}{dp_\beta} \Gamma^\alpha + \frac{i}{2} \Gamma'^\alpha \sigma_{\alpha\beta} p^\beta .$$

Setzt man in diesen Ausdruck (30) ein, so folgt

$$\begin{aligned} M^i(p | \mu | p) &= -M q^i A^{pp'} - \frac{1}{2M} A + (pp' - \frac{1}{2} M^2) B + \\ &- \frac{1}{2} q^i p^i B^{pp'} + (pp' + \frac{1}{2} M^2) C - \frac{i}{2} q^i p^i C^{pp'} \end{aligned}$$

mit

$$A^{(pp')} = \frac{d}{dp p} A \text{ u.s.w.}$$

In dieser Gleichung berücksichtigen wir (31)

und erhalten für $G_\mu = M(p|\mu|p')$

$$G_\mu = G_N + \frac{1}{3} \frac{q^2}{p^2} (G_e - G_N) + \frac{2}{3} q^2 G_N^{(q^2)} \quad (32)$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach G_N führt auf eine Differentialgleichung, deren Lösung

$$G_N = \frac{1}{u^2 \sqrt{1+u}} \int_0^u du' u'^2 \sqrt{1+u'} \left[\frac{3}{2} G_\mu + \frac{1}{2} \frac{u'}{1+u'} G_e \right] \quad (33)$$

ist, mit

$$u = -\frac{q^2}{4M^2}.$$

Die magnetische Momentendichte wird also nicht durch G_N beschrieben, wie Ernst, Sachs, Wali [19] behaupten, sondern durch eine Funktion G_μ , die neben G_N und deren Ableitung die elektrische Ladungsdichte G_e enthält.

Durch hochenergetische e-p Streuung ist es gelungen, die elektromagnetischen Formfaktoren des Protons in einem großen Bereich zu messen. G_N ist bestimmt bis zu einem Energie-Impulsübertrag von 25 (GeV). Bedeutend schwieriger ist die Messung des elektrischen Formfaktors. In den letzten Jahren haben Präzisionsmessungen ergeben, daß das im MeV-Bereich bestätigte Skalengesetz der elastischen Elektron-Proton-Streuung

$$\frac{1}{G(0)} G(q^2) = \frac{1}{G_N(0)} G_N(q^2) \quad (34a)$$

oberhalb von 1 GeV möglicherweise verletzt wird [23]. Ein Fit für die Formfaktoren, wenn auch nicht der beste, ist die Dipolformel

$$G_N = \frac{G_N(0)}{(1 + \frac{1}{2} q^2)^2} =: D \quad (34b)$$

Es ist bemerkenswert, daß eine derart einfache Funktion (nur

ein Parameter) die Hochenergiemessungen in einem q^2 Bereich von über $20(3\text{eV}/c)^2$ beschreibt.

Setzen wir (34b) in (32) ein, so erhalten wir das gemessene Matrixelement der magnetischen Dipoldichte

$$\frac{G_\mu}{D} = 1 + \frac{1}{3} \frac{-q^2}{P^2} \left[1 - \frac{G_e(0)}{G_\mu(0)} \right] + \frac{4}{3} \frac{q^2}{1 - \frac{1}{\alpha^2} q^2} \quad (34c)$$

Versuchen wir in Modellberechnungen das Skalengesetz (34a) mit einer z.B. durch umlaufende Teilchen erzeugten Korrelation zwischen der räumlichen Ladungs - und räumlichen magnetischen Dipolverteilung zu erklären, so müssen wir nach unseren Überlegungen G_e mit G_μ und weniger mit G_M in Verbindung setzen. Allerdings lassen die experimentellen Ergebnisse kein Skalengesetz von der Gestalt

$$\frac{1}{G_\mu(0)} G_\mu(q^2) = \frac{1}{G_e(0)} G_e(q^2)$$

zu.

Um die Dipolformfaktoren zu deuten, wenden wir uns jetzt den räumlichen Dichteverteilungen zu.

Im Einteilchen - Zustandsraum sind ϵ und μ diagonal, also z.B.

$$\langle xjm | \epsilon | x'jm' \rangle = \delta(x-x') \delta_{jj'} \delta_m^{m'} \varrho_\epsilon(x).$$

$\varrho_\epsilon(x)$ ist die kovariante räumliche Ladungsverteilung im Ruhesystem. Integrieren wir diese Gleichung und berücksichtigen wir (B 22) so ergibt sich

$$\langle \vec{p}=0, s=\frac{1}{2} | \epsilon | x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \langle \vec{p}=0, s=\frac{1}{2} | \epsilon | x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \varrho_\epsilon(x).$$

Das Einschieben eines vollständigen Impulszustandsystems führt zu

$$\varrho_\epsilon(x) = \frac{1}{\langle p=0, s=\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \epsilon | p=0, s=\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle} \int d^3p E^{-1} \langle \vec{p}=0, s=\frac{1}{2} | \epsilon | p, \frac{1}{2} \rangle \psi_x^{s\frac{1}{2}}(p).$$

Mit

$$\int d\Omega \psi_A(p) = \sqrt{4\pi} g^*,$$

wobei ψ_A die erste Spinorkomponente von ψ bezeichnet, erhalten wir die Transformationsformel

$$\varrho_\epsilon(x) = \frac{\sqrt{4\pi}}{(p \cdot a) x \cdot b} \int dE |p| G_e \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \left[\frac{\cos x\alpha}{\cosh \alpha \frac{1}{2}} + 2x \frac{\sin x\alpha}{\sinh \alpha \frac{1}{2}} \right]. \quad (35a)$$

Dabei ist

$$q^* = -4M^2 \sinh^2 \alpha \frac{1}{2}$$

Eine partielle Integration ermöglicht die Gestalt

$$\varrho_\epsilon(x) = \frac{4\pi M^*}{1+4x^2} \int_0^\infty d\alpha \cos x\alpha \frac{1}{\cosh \alpha \frac{1}{2}} \frac{d}{d\alpha} \left[\sinh^2 \alpha \cotgh \alpha \frac{1}{2} G_e \right]. \quad (35b)$$

Gleichzeitig mit der Umkehrformel

$$\frac{d}{d \cosh \beta} \sinh^2 \alpha \cotgh \beta G_e = \frac{1}{2\pi M^*} \int_0^\infty dx \cos x\alpha \varrho_\epsilon(x) (1+4x^2) \quad (36)$$

stellt (35) den Zusammenhang zwischen der Ladungsverteilung $\varrho_\epsilon(x)$ und dem elektrischen Formfaktor G_e her. Für die magnetische Dipoldichte ϱ_μ und deren Verknüpfung mit G_μ gelten genau dieselben Beziehungen.

E 1) Die Gesamtladung.

Für die Gesamtladung $Q = \frac{(2\pi)^3}{M} G_e(0)$ erhalten wir

$$Q = 4\pi \cdot \int_0^\infty dx \left(\frac{1}{M} + \frac{x^2}{M^3} \right) \varrho_\epsilon(x). \quad (37)$$

Diese Darstellung der Ladung läßt die Interpretation zu, daß die Flächen gleicher Dichte immer größer als eine positive Kon-

stante sind. Für $x \rightarrow 0$ ziehen sich diese Flächen nicht auf einen Punkt zusammen, sondern auf eine unendlich dünne Scheibe. Die genaue Gestalt der Flächen gleicher Ladung bleibt natürlich auf Grund der diskreten Richtungsquantelung unbestimmt.

Die Ausdehnung der kleinsten Scheibe ist von der Größenordnung

$$r \approx r_0 = |W|.$$

Ein derartiges Resultat haben wir von der klassischen Physik her erwartet. Bekanntlich muß eine klassische Materieverteilung in der Ebene senkrecht zum Eigendrehimpuls immer eine Ausdehnung $r \gg r_0$ haben, damit die Energiedichte positiv definit bleibt. Siehe dazu [24], [25] und vor allem [26]. In r_0 tritt $\hbar$ nicht auf. Diese Größe ist eine charakteristische Konstante für eine klassische relativistische rotierende Materieverteilung.

E 2) Punktförmige Ladungsdichte.

Die konzentrierteste Ladungsverteilung ist nach E 1) nicht wie beim Pion eine Punktladung sondern die singuläre Flächenladung

$$\varrho_p(x) = \pi Q M^3 \delta(x).$$

Sie entspricht dem Formfaktor

$$G_p(q^2) = \frac{QM}{8\pi} \frac{1}{\cosh \frac{1}{2}\alpha}.$$

E 3) Asymptotisches Verhalten der Formfaktoren.

Fallen die Formfaktoren G_e , G_μ asymptotisch, bis auf $\ln^2(-q^2)$ Terme, schwächer ab als $G^*(q^2)$, so divergiert das Transformationsintegral (35) . In diesem Fall existieren keine räumlichen Dichteverteilungen im üblichen Sinne. Die Funktionen ξ_e , ξ_μ sind nur noch im Sinne der analytischen verallgemeinerten Funktionen, mit Träger in der komplexen x - Ebene, definiert. Solche Dichten sind bis jetzt experimentell noch nicht gefunden worden. Die gemessenen dipolartigen Formfaktoren (34b) verlaufen unterhalb der kritischen Grenze G_p und entsprechen demnach ausgedehnten nichtsingulären Dichteverteilungen.

E 4) Die mittlere quadratische Ausdehnung.

Für die mittlere quadratische Ausdehnung in Spinrichtung

$$\overline{X_\mu^2} = \frac{4\pi}{Q} \int_0^\infty d\frac{x}{M} x^2 \left(\frac{1}{4M^2} + \frac{x^2}{M^2} \right) \xi_\mu(x)$$

ergibt sich, indem wir nach α entwickeln,

$$\frac{1}{M^2} \overline{X_e^2} = \overline{r_{er}^2} - \frac{3^2}{2^2} \frac{1}{M^2} ; \quad \overline{r_{\mu r}^2} = 6 \frac{d}{dq^2} G_e(q^2) \Big|_{q^2=0} \quad (38)$$

Für die magnetische Momentenverteilung gilt analog

$$\frac{1}{M^2} \overline{X_\mu^2} = \overline{r_{\mu r}^2} - \frac{3^2}{2^2} \frac{1}{M^2} = \frac{10}{G_\mu(0)} \frac{d}{dq^2} G_\mu + \frac{1}{2MG_\mu} (G_\mu - 11G_\mu) \quad (38)$$

Aus dem experimentellen Befund ergibt sich

$$\frac{1}{M^2} \overline{X}_e^2 = (0,75 \cdot 10^{-13})^2 \text{ cm}^2$$

$$\frac{1}{M^2} \overline{X}_\mu^2 = (0,95 \cdot 10^{-13})^2 \text{ cm}^2.$$

Die $\overline{X}^2$ sind ein Maß für die Abweichung von der singulären
Flächendichte $\rho_p(x)$

$$\frac{G(q^2)}{G_p(q^2)} = 1 + \frac{6}{M^2} \overline{X}^2 q^2 + O(\alpha^4).$$

E 5) Mikrokausalität und Unitarität.

Aus dem Verschwinden des Kommutators für raumartige Abstände können wir für Nukleonen, im Gegensatz zu den Pionen, keine Dispersionsbeziehung für die Formfaktoren beweisen. Das liegt sowohl an den Singularitäten im unphysikalischen Bereich der s-Achse als auch am Spin des Nukleon. Gestützt auf die Analyse der störungstheoretischen Ausdrücke postuliert man Dispersionsbeziehungen für G_e, G_μ . Natürlich erfüllt dann auch G_μ (32) eine Dispersionsbeziehung. Aus rein technischen Gründen, und zwar sollen die im folgenden auftretenden Integrale konvergieren, fordern wir, daß $G_\mu(s - 4M^2)$ unsubtrahierten Dispersionsbeziehungen genügen. Damit machen wir natürlich eine Einschränkung für die Form -

faktoren im zeitartigen Bereich.

$$G(s) (s-4M^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \frac{\text{Im}[(s'-4M^2) G]}{s' - s}.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Transformationsformel (35a) ein und vertauschen die Integrationsreihenfolge, so folgt

$$(1+4x^2) \mathcal{G}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \text{Im} G(s) \cdot \tilde{K}(sx), \quad (39)$$

mit

$$\left(\frac{2}{2\pi}\right) \tilde{K}(sx) = (s-4M^2) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds \sinh \alpha}{(s-s')(s-4M^2)} \left[\frac{\cosh \alpha}{\cosh \frac{1}{2}\alpha} + 2x \frac{\sinh \alpha}{\sinh \frac{1}{2}\alpha} \right]$$

und

$$s = 2M^2(1 - \cosh \alpha), \quad 2\beta = \alpha,$$

also

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right) \tilde{K}(sx) = (s-4M^2) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s-4M^2)(s-s')} \left[(x-\frac{1}{2}) \sin(x+\frac{1}{2})\alpha + (x+\frac{1}{2}) \sin(x-\frac{1}{2})\alpha \right].$$

Wegen

$$\frac{s-4M^2}{(s-4M^2)(s-s')} = \frac{1}{s-s'} - \frac{1}{s-4M^2}$$

läßt sich $\tilde{K}$ auf K (24) zurückführen. Es gilt

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right) \tilde{K}(sx) = (x-\frac{1}{2}) \frac{\cos(x+\frac{1}{2})}{\sinh \pi(x+\frac{1}{2})} + (x+\frac{1}{2}) \frac{\cos(x-\frac{1}{2})}{\sinh \pi(x-\frac{1}{2})} \quad (40)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sinh \rho'}{\cosh \pi x} \left[\frac{\cosh \rho'}{\sinh \rho'} + 2x \frac{\sinh \rho'}{\sinh \rho'} \right] + 1.$$

Setzen wir (40) in (39) ein und berücksichtigen, daß

wegen der postulierten Dispersionsbeziehung

$$\int_{s_0}^{\infty} ds' \operatorname{Im} G(s') = 0$$

ist, so ergibt sich

$$\mathcal{G}(x) = \frac{-4\pi}{\cosh \pi x} \int_{s_0}^{\infty} ds' \operatorname{Im} G \left[\frac{\cosh x \gamma'}{\sinh \beta} + 2x \frac{\sinh x \gamma'}{\cosh \beta} \right] \frac{\sinh \gamma'}{1 + 4x^2}. \quad (41a)$$

Partielle Integration führt wieder auf eine ähnliche Form wie (35 b). Es gilt

$$\mathcal{G}(x) = \frac{4\pi M^2}{(1+4x^2)\cosh \pi x} \int_{s_0}^{\infty} d\gamma' \frac{\cosh x \gamma'}{\sinh \beta} \frac{d}{d\beta} [\sinh^2 \gamma' \operatorname{tgh} \beta \operatorname{Im} G]. \quad (41b)$$

Dieses Integral besteht aus zwei Anteilen

$$\mathcal{G} = \int_{s_0}^{\infty} = \int_{s_0}^{4M^2} + \int_{4M^2}^{\infty} = \mathcal{G}^{(u)} + \mathcal{G}^{(ph)}.$$

Das zweite Integral erstreckt sich über den physikalischen Bereich. Es ist von derselben Art wie das entsprechende Integral für die Pionen (26). Alle diesbezüglichen Bemerkungen, insbesondere die Diskussion der Unitarität und die Folgerungen für Hochenergie-Experimente, lassen sich auf die Dichteverteilungen der Protonen übertragen. Das erste Integral gibt einen Beitrag von dem unphysikalischen Bereich

$$4m_\pi^2 \ll s \ll 4M^2.$$

In diesem Fall ist γ' rein imaginär

$$|\gamma'| \ll |\gamma_\pi| \quad \frac{m}{M} = \sinh \gamma' \frac{1}{2}.$$

Asymptotisch verhält sich dieser Beitrag wie

$$\varrho(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-(\pi - \frac{1}{2}\pi)x}}{x}$$

und entspricht der Ausdehnung der Pionenwolke.

Die Schwellen im unphysikalischen Bereich verleihen dem Proton eine Schichtenstruktur. Der exponentielle Abfall ist durch die Lage der jeweiligen Schwelle bestimmt. Im Inneren ist die räumliche Verteilung genau wie beim Pion durch die Singularitäten zweiter Art in den höheren Riemann-Blättern gegeben (Seite 47) .

E 6) Modelle der Protonenstruktur.

Die Transformation in die Ruheabstandsbasis (35) ist besonders gut geeignet zur Untersuchung von Hochenergiemodellen der elastischen e-p Streuung. Nach der cos - Transformation (35) ist das asymptotische Verhalten der Formfaktoren durch den Verlauf der Funktionen ϱ_e, ϱ_μ in der Umgebung der Stelle $x=0$ bestimmt.

Vergleichen wir unsere x - Darstellung der Formfaktoren $G(q^2)$ mit der Partialwellenzerlegung der Streumatrix für Streuprozesse, so fällt auf, daß wir in beiden Fällen nach den irreduziblen Darstellungen der maximalen Symmetriegruppe im Minkowski - Raum entwickelt haben. Im letzten Fall ist diese Gruppe die Poincaré - Gruppe, im ersten Fall, wegen $\epsilon \in E(2,0)$, die homogene Lorentz - Gruppe. Unsere Transformationsformeln (36) (35) sind also die Übertragung der Partialwellenentwicklung auf die Erwartungswerte von

Stromoperatoren am Nullpunkt. Dementsprechend wollen wir den Begriff der Regge - Pole auf unser Problem anwenden.

Dazu gehen wir von unserem Integral (41 b) aus. Die Ausreduzierung der Matrixelemente nach x können wir auch im zeitartigen Bereich vornehmen. In diesem Fall sind die Matrixelemente nicht mehr mit statischen Dichteverteilungen, sondern mit Erzeugungsprozessen verbunden. Ohne auf Einzelheiten einzugehen erwähne ich, daß in diesem Fall, z.B. für den Imaginärteil, die Transformationsformel

$$\chi_{\epsilon} = \frac{-4\pi}{1+4x^2} \int_0^{\infty} dy \frac{\sin xy}{\sinh \beta} \frac{d}{d\beta} [\sinh^2 y \operatorname{tgh} \beta \operatorname{Im} G_{\epsilon}(q^*)] \quad (42)$$

gilt.* Im Erzeugungsbereich wird also die x - Transformation mit g durchgeführt (B 39). Damit ergibt sich, daß die Funktion

$$h = g^{\operatorname{pru}} \cosh \pi x + i\chi = \frac{-4\pi}{1+4x^2} \int_0^{\infty} dy \frac{e^{ixy}}{\sinh \beta} \frac{d}{d\beta} [\sinh^2 y \operatorname{tgh} \beta \operatorname{Im} G(q^*)] \quad (43)$$

analytisch in der oberen x - Ebene ist.

$g^{(u)}$ ist analytisch in der ganzen x - Ebene und braucht uns nicht mehr weiter zu interessieren.

Singularitäten können nur noch in der unteren Halbebene auftreten. Nehmen wir in Analogie zur Regge - Pol Theorie an, daß in diesem Bereich Pole auftreten, so wird das Verhalten von g in der Umgebung von $x=0$ und damit, wie wir oben gesehen haben, das asymptotische Verhalten von $G(q^*)$ durch den nächstliegenden Pol bestimmt.

*) Eigene unveröffentlichte Arbeit.

$$h(x) \propto \frac{1}{x+iz} . \quad (44)$$

Schließen wir ein asymptotisch oszillierendes Verhalten aus, wie der experimentelle Befund nahelegt, aber nicht verbietet, so müssen wir z reell wählen. Mit reellem b ergibt sich

$$g^{(x)} = \frac{b}{x^2+z^2} \cdot \frac{1}{\cosh \pi x} . \quad (45)$$

Der Faktor $\frac{1}{\cosh \pi x}$ bewirkt, daß $G(q^2)$ über die Stelle $q^2=0$ hinaus regulär bleibt. Andererseits verhindert dieser Faktor eine geschlossene Berechnung der korrespondierenden Formfaktoren. Setzen wir (45) in (35) ein, so wird nach [11, Seite 400]

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dx \frac{\cos x \alpha}{\cosh \pi x} \frac{1+4x^2}{x^2+z^2} = \\ &= \left(1 - \frac{d^2}{d\alpha^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos \pi z} e^{-z\alpha} - \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha}}{(n+\frac{1}{2})^2 - z^2} \right) . \end{aligned}$$

(I läßt sich durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken.)

Asymptotisch wird

$$I \propto e^{-z\alpha} + O(e^{-\frac{3}{2}\alpha}) ,$$

und damit

$$G \propto (q^2)^{-(z+\frac{3}{2})} \quad G \propto (q)^{-(z+\frac{3}{2})} \cdot P(\ln[-q^2]) .$$

$P(y)$ ist ein Polynom.

Im Bereich $0 < z < 3/2$ wird die Potenz des asymptotischen Ab-

falls der Formfaktoren durch die Lage von z bestimmt. Das experimentelle Ergebnis wird durch einen Pol in der Umgebung

$$Z \approx 1/2$$

wiedergegeben.

Eine theoretische Begründung diese Poles, etwa durch Aufsummieren der störungstheoretischen Ausdrücke in der Feldtheorie, würde uns weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus führen.

Wir wollen nur bemerken, daß $h(x)$ (43) dieselben analytischen Eigenschaften in der Umgebung der reellen Achse hat wie

$$\tilde{h}(x) = \frac{4\pi}{1+4x^2} \int_{4H^2}^{\infty} ds s^{ix} \frac{s}{\sinh y \sinh \beta} \frac{d}{d\beta} [\sinh^2 y \tanh \beta \operatorname{Im} G^{(\lambda)}].$$

Dabei haben wir $e^{i\beta}$ durch $\frac{s}{4H^2}$ ersetzt.

Dieses Integral ist im wesentlichen die Mellin - Transformation des Imaginärteils von $G(q^2)$ im zeitartigen Bereich. Zur Untersuchung des Regge - Pol Verhaltens der Streumatrix hat sich die Mellin - Transformation als sehr nützlich erwiesen [27, Seite 151]. Bei Formfaktoren wird man also zwanglos zu dieser Transformation hingeführt, wobei x eine wohldefinierte physikalische Bedeutung hat.

III Prüfung der Quantenelektrodynamik

=====

Die Ruheabstandsanalyse der Stromoperatoren am Nullpunkt kann im Prinzip auch für Elektronen und Myonen durchgeführt werden. Auf diese Spin- $1/2$ Teilchen lassen sich die Überlegungen bezüglich der Protonen übertragen. In einer Hinsicht liegen hier die Verhältnisse günstiger. Die Quantenelektrodynamik gestattet uns, die Matrixelemente bis auf die Beiträge der Vakuumpolarisation durch Hadronen zu berechnen. Die Formfaktoren G_e , G_μ sind durch die elastischen Strahlungskorrekturen des Vertex festgelegt*. Diese lassen sich im Prinzip in jeder störungstheoretischen Ordnung angeben. Zur Lepton - Lepton Streuung tragen allerdings neben diesen Vertexkorrekturen alle anderen möglichen Feynman - Diagramme bei. G_e, G_μ sind weder die dominierenden Größen, noch lassen sie sich aus dem Experiment bestimmen. Räumliche Strukturen lassen sich in diesem Fall nur über den Stoßparameterformalismus definieren. Diese Darstellung scheint für Streuprozesse bei hohen Energien besonders gut geeignet, wie neuere Untersuchungen der störungstheoretischen Reihe von Cheng, Wu [28] gezeigt haben.

Die Quantenelektrodynamik ist bis jetzt sehr erfolgreich gewesen [29]. Sowohl die niederenergetischen Präzisionsmessungen als auch die hochenergetischen Streuversuche stimmen mit den theoretischen Voraussagen überein. In absehbarer Zeit wird es möglich sein die Q.E.D. bei noch höheren Energien zu testen.

* Zur Vermeidung der Infrarotdivergenzen nehmen wir für das Photon eine sehr kleine Masse an.

Hier kann man wesentliche Hinweise für die Lösung der Schwierigkeiten erwarten, die mit den Divergenzen in der Quantenfeldtheorie verknüpft sind. So grundsätzliche Fragen wie diejenigen nach der Gültigkeit der Mikrokausalität, der Topologie bei kleinen Abständen sollten in diesem Gebiet durch Vergleich mit der Erfahrung untersucht werden können. [1, 1960]

Allgemein gehen wir bei hochenergetischen Streuprozessen so vor, daß wir die Stützungskorrekturen nach der unmodifizierten Quantenelektrodynamik berechnen. Deren Beiträge werden dann von dem experimentellen Wirkungsquerschnitt abgezogen. Eventuelle Abweichungen von der Quantenelektrodynamik sind somit auf die niedrigste störungstheoretische Ordnung abgewälzt und werden durch phänomenologische Formfaktoren in den Propagatoren und Vertizes berücksichtigt. Solche Funktionen können zum Teil durch eine zusätzliche räumliche Struktur erklärt werden. Im relativistischen Bereich treten wieder dieselben Schwierigkeiten auf wie für die Dichteverteilung des hadronischen Beitrags zu der Protonenstruktur.

Auch in diesem Fall ist es möglich mit Hilfe des Ruheabstands eine kovariante Dichte zu definieren. Abweichungen des Photonpropagators

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{F(q^2)}{q^2}$$

führen zu einer Modifikation des Coulomb - Felds

Das elektromagnetische Potential am Koordinatenursprung ist in niedrigster störungstheoretischer Ordnung [20]

$$A_{\mu}^{(0)} = \frac{F(q)}{q^2} \langle p_f | j_{\mu}(0) | p_i \rangle = \frac{eM}{(2\pi)^3} \frac{F}{q^2} \delta_{\mu}.$$

In Analogie zur elektrischen Ladungsdichte (1) gilt für das elektrische Potential im Ruhesystem

$$A_{(0)}^{\mu} p_{\mu}^{(i)} = \frac{eM^2}{(2\pi)^3} \frac{F}{q^2}.$$

Die räumliche Verteilung des Potentials $\Phi(x)$ ist durch die Ruheabstandstransformation von $F(q^2)/q^2$ gegeben.

Nach (35) ist

$$\Phi(x) = \frac{eM}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{1+4x^2} \int_0^{\infty} d\alpha F(q^2) \cosh^2 \beta \left[\frac{e \cosh \alpha}{\cosh \beta} + 2x \frac{\sinh \alpha}{\sinh \beta} \right] \quad (46)$$

Die unmodifizierte Quantenelektrodynamik, der eine lokale Wechselwirkung der Elektronen- und Photonenfelder zugrunde liegt

$$L_W(z) = \int d^4 z' \delta(z-z') j_{\mu}(z) A^{\mu}(z'),$$

führt mit $F(q)=1$ zu einem stark singulären Potential

$$\Phi = \frac{eM}{(2\pi)^3} \frac{8\pi}{1+4x^2} \left\{ \int_0^{\infty} d\beta x \frac{\sinh \alpha}{\sinh \beta} + \int_0^{\infty} d\beta (\cosh \beta \cosh \alpha + 2x \sinh \beta \sinh \alpha) \right\}.$$

Das zweite Integral ist nur im Sinne der verallgemeinerten Funktionen definiert. Nach [21] und [15] ist

$$\Phi = \frac{eM}{2\pi^2} \left\{ \frac{d}{d(1+4x^2)} \delta(1+4x^2) + \frac{2\pi x}{1+4x^2} \operatorname{tgh} \pi x \right\},$$

wobei die Nullpunktsingularität durch die in der komplexen y -Ebene analytische Distribution $\delta(y)$, mit

$$\delta(s+id) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{h!} \left(-i \frac{d}{ds}\right)^n \delta(s)$$

gegeben ist.

Für endliche Abstände können wir uns auf den zweiten Term beschränken, der asymptotisch wegen

$$\phi \Rightarrow \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{1}{x_M} + \frac{1}{x_M} \frac{1}{1+4x^2} + O(e^{\pi x}) \right\} \Rightarrow \frac{e}{4\pi} \frac{1}{x_M}$$

in das bekannte makroskopische Coulomb - Potential übergeht. Der Spin des Elektrons liefert den zweiten Term, wogegen der exponentiell abfallende Beitrag durch die Quantenmechanik bestimmt ist.

Bis jetzt haben wir den Formfaktor F nicht eingeschränkt. Wegen der möglichen Abweichungen bei kleinen Abständen sind Dichteverteilungen, die asymptotisch exponentiell abfallen, besonders interessant. Ist $\phi(x)$ zusätzlich noch eine glatte Funktion in der Umgebung des Nullpunkts, so läßt sich die mittlere Ausdehnung durch einen mittleren quadratischen Radius angeben. Alle höheren Momente sind dann positiv und klein gegenüber $\bar{r}^2$.

$0 \ll \bar{r}^2 \ll \bar{r}^2 h^{-2(n-1)}$ Eine derartige einparametrische Klasse von Formfaktoren ist in der konventionellen Betrachtungsweise durch die Polfunktion

$$F = \frac{-\Lambda^2}{-q^2 + \Lambda^2}$$

gegeben. Derartige Formfaktoren werden zur Regularisierung der Feynman - Integrale benutzt. In unserer Be - handlung dagegen entspricht dem Pol die Funktion

$$\phi \approx \cos X \alpha_0 e^{-\pi X} ; \quad X \gg 1 ; \quad \Lambda^2 = 4M^2 \sinh^2 \frac{\alpha_0}{2} .$$

Dieses Potential ist über die ganze Compton - Wellenlänge ausgedehnt. Wegen des oszillierenden Anteils sind die höheren Momente $\overline{x^{2n}}$ nicht mehr positiv definit.

Eine Klasse einparametriger Formfaktoren, welcher einer Ausdehnung $(\alpha_M)^{-1}$ entsprechen, ist

$$F = \frac{\alpha_o^2}{\alpha^2 + \alpha_o^2}$$

Diese Funktionen besitzen einen Schnitt auf der physikalischen q^3 -Achse und einen Pol in einem höheren Riemannschen - Blatt.

Formfaktoren mit Beiträgen von ähnlicher Gestalt treten z.B. bei der Aufsummierung der Vakuumpolarisation auf

$$\tilde{D} \simeq \frac{q^2}{q^2 - \Pi(\alpha)}$$

und können somit physikalisch gedeutet werden. Es ist klar, daß auch hier wieder extrem hohe Energien notwendig sind, um eine derartige Abweichung, die eine sehr kleine Struktur von der Ausdehnung $(\alpha M)^4$ in der Ruheabstandsbasis bedeutet, experimentell festzustellen.

Literaturverzeichnis

=====

- 0 W. Heisenberg, Z. Phys. 120 (1943) 513
- 1 H. Salecker, Z. Naturforschg. 8a (1952) 16,
Z. Naturforschg. 10a (1955) 349,
Z. Phys. 160 (1960) 385
- 2 M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. (London) 195A (1948) 62
- 3 I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, Z. Ya. Shapiro, Representation
of the rotation and Lorentz Groups and their applications,
Pergamon Press (1963)
- 4 E. P. Wigner, Annals of Math. 40 Nr. 1 (1939)
- 5 H. Joos, Fortschr. Phys. 10 (1962) 65
- 7 M. A. Neumark, Lineare Darstellungen der Lorentz-Gruppe
DVW (1963)
- 8 M. A. Neumark, Linear representations of the Lorentz Group,
American Math. Society Translations, Series 2, Vol. 6
- 9 A. Chakrabarti, J. Math. Phys. 9 (1971) 1822
- 10 J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistische Quantenmechanik I.
B. I. Mannheim Seite 64
- 11 W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, Formulas and Theorems
for the Special Functions of Mathematical Physics
Springer-Verlag (1966)
- 12 A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi
Higher Transcendental Functions, Vol. 1 Seite 102
- 13 S. D. Drell, F. Zachariasen, Electromagnetic Structure
of Nucleons, Oxford University Press (1961)
- 14 S. S. Schweber, Relativistische Quantum Field Theory,
Harper (N.Y.) (1962) 781
- 15 A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi,
Tables of Integral Transforms Vol 1 Seite 89
- 16 P. G. Federbusch, M. L. Goldberger, S. B. Treiman,
Phys. Rev. 112 (1958) 642
- 17 H. Salecker, Z. Phys. 164 (1961) 463
- 18 G. J. Gounaris, J. J. Sakurai, Phys. Rev. Let. 21 Nr. 4
(1968) 244
- 19 F. J. Ernst, R. G. Sachs, K. C. Wali, Phys. Rev. 119 (1960) 1105

- 20 J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistische Quantenmechanik I, B. I. Mannheim Seite 121
- 21 I. M. Gel'fand, G. E. Schilow, Verallgemeinerte Distributionen I, D. V. W. Berlin (1967) Seite 166
- 22 S. Mandelstam, Proc. Roy. Soc. (London) A 233 (1955) 248
- 23 Ch. Berger, E. Gersing, G. Knopp, B. Langenbeck, K. Rith and F. Schumacher, Phys. Letts. 28B (1968) 277
- 24 C. Möller, Comm. Dublin Institute for Advanced Studies A 5 (1949)
- 25 J. L. Synge, Special Relativity, North-Holland (1965) 308
- 26 C. Möller, The Theory of Relativity, Clarendon Press (1972) 179
- 27 R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne The Analytic S-Matrix, Cambridge University Press (1966)
- 28 H. Cheng, T. T. Wu, Phys. Rev. Letters 22 Nr. 13 (1969) 666
- 29 B. E. Lautrup, A. Peterman, E. de Rafael, Phys. Reports 3C, Nr. 4 (1972)
- 30 G. F. Chew, R. Karplus, S. Gasiorowicz und F. Zachariasen, Phys. Rev. 110, 265 (1958).
E. Salecker, Z. Naturforschung 15a 1023 (1960).
- 31 L. L. Foldy, Phys. Rev. 87, 688 (1952).
G. Salzman, Phys. Rev. 99, 973 (1955).
Siehe auch [13]

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Salecker für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche kritische Bemerkungen.
Herrn Dr. G. Tomberger danke ich für interessante Gespräche.
Schließlich bin ich den Herrn Dr. T. Anders, Dr. H. Elend, Dr. K. Ringhofer für aufschlußreiche Hinweise zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf:

Joseph Demuth, geb. 24.3.1942 in Luxemburg,
Großherzogtum Luxemburg.

Eltern: Eugène Demuth, Clementine Demuth geb. Arend

Schulbesuch: 1948-1955 Volksschule in Consdorf (Luxemburg)
1955-1958 Lycée classique in Echternach (Luxemburg)
1958-1961 Lycée de garçons in Luxemburg

Studium: Physik

1961-1964 an der Universität Tübingen,
Vordiplom 1964

1964-1968 an der Universität Freiburg im Breisgau,
Diplomarbeit bei Prof. Dr. K. Westpfal

seit 1968 Arbeit bei Prof. Dr. H. Salecker an der
Universität München

